

Kursverlaufsprojektion auf Basis der Empirical Mode Decomposition

Beitrag zum VTAD-Award 2017

Dr. Oliver Reiß *

E-Mail: oliver-reiss@freenet.de

Februar 2017

Zusammenfassung

Die Empirical Mode Decomposition ist ein Verfahren zur Identifizierung einzelner Schwingungen aus einem Signal. Dabei wird das Signal in einzelnen Komponenten zerlegt: Mehrere nicht-stationäre Wellen und eine Trendkomponente, die zusammen wieder das ursprüngliche Signal ergeben.

In dieser Arbeit wird diese Technik für die Bestimmung eines potentiellen Kursverlaufes auf den Aktienmarkt angewandt. Zwar sind die identifizierten Wellen nicht-stationär, d.h. die Amplitude und Wellenlänge einer einzelnen Schwingungskomponente verändern sich im Zeitverlauf, allerdings weichen die einzelnen Amplituden und Wellenlängen nicht zu stark vom zeitlichen Mittel ab. Damit ist eine Prognostizierbarkeit der Schwingungen gegeben; entweder als klassische Sinus-Schwingung oder als eine Schwingung mit Dämpfung/Anregung, so dass die Schwingung wieder zu ihrer mittleren Amplitude und Wellenlänge überführt wird.

Zur Einwertung der praktischen Relevanz wird diese Verfahren auf den Kursverlauf des Deutschen Aktienindex angewandt und es wird so für verschiedene Kalenderjahre der jeweils prognostizierte Kursverlauf mit der tatsächlich eingetretenen Marktbewegung gegenübergestellt. Zum Abschluss wird ferner noch ein Ausblick unter Verwendung dieser Methodik auf den Verlauf des Deutschen Aktienindex im Jahr 2017 gegeben.

* Der Autor ist Diplom-Physiker und Certified Financial Technican (CFTe). Er arbeitet als freiberuflicher Unternehmensberater mit dem Schwerpunkt Risikocontrolling & IT in der Finanzbranche. In der Vereinigung Technischer Analysten Deutschlands e.V. (VTAD) ist er stellvertretender Regionalmanager der Regionalgruppe Düsseldorf.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Hinweise zur beigefügten Excel-Datei	3
2	Die Empirical Mode Decomposition	4
2.1	Das Grundprinzip	4
2.2	Der Sifting-Prozess	5
2.3	Stabilisierung am Rand	6
2.4	Beispiel: Anwendung auf Finanzzeitreihen	7
3	Die Prognose einer Intrinsic Mode Function	8
3.1	Die verschiedenen Prognoseverfahren	8
3.2	Die gedämpfte Schwingung	9
3.2.1	Physikalischer Exkurs	9
3.2.2	Die Fortschreibung einer IMF als gedämpfte Welle	9
3.3	Die Fortschreibung einer IMF als harmonische Schwingung	10
3.3.1	Methode der kleinsten Quadrate für die harmonische Schwingung	10
3.4	Die Prognose der schwingungsfreien Komponente	10
4	Rückblickende Anwendung des vorgestellten Prognose-Verfahrens am Beispiel des Deutschen Aktienindex	11
4.1	Beschreibung des Prognoseverfahren	11
4.2	Übersicht über die tatsächlichen und prognostizierten Kursverläufe	12
4.3	Der Ausblick für 2017	14
5	Quellenverzeichnis	15

Abbildungsverzeichnis

1	Flussdiagramm zur Erläuterung des EMD-Algorithmus	4
2	Erläuterung des Sifting-Prozesses	5
3	Spline ohne Randpunktbedingung	6
4	Spline mit Randpunktbedingung	6
5	Begründung für die Betrachtung der logarithmierten Kurszeitreihe	7
6	Die kurzwelligen IMF des DAX	8
7	Die langwelligen IMF des DAX	8
8	DAX Prognose 2011	12
9	DAX Prognose 2012	12
10	DAX Prognose 2013	13
11	DAX Prognose 2014	13
12	DAX Prognose 2015	13
13	DAX Prognose 2016	14
14	DAX Prognose 2017	14

1 Einleitung

Ein Teilgebiet der technischen Analyse ist die Zyklus-Theorie, die bei jedem Jahreswechsel besonders intensiv von technischen Analysten eingesetzt wird, um einen potentiellen Kursverlauf des Aktienmarktes im neuen Jahr aufzuzeigen. Dabei werden üblicherweise die jahreszeitlichen Verläufe (Jahres-Zyklus), der US-Präsidentschafts-Zyklus sowie der Dekaden-Zyklus herangezogen. Diese klassischen Zyklen basieren auf der Annahme einer festen Periodenlänge und Amplitude; dem Aktienmarkt werden dementsprechend stationäre Schwingungen unterstellt. Dieses Vorgehen ist allgemein anerkannt, auch wenn die Wirtschafts-Zyklen nicht stationär sind: Manche Boom-Phasen dauern länger als andere und auch die Stärke der Aufschwünge unterscheiden sich.

Vor diesem Hintergrund erscheint es folgerichtig, in den Märkten nach Zyklen ohne die Annahme einer festen Periodenlänge oder Amplitude zu suchen. Als mathematische Grundlage dient dazu die Empirical Mode Decomposition, die von mehreren Wissenschaftlern in den 1990er Jahren entwickelt und 1998 veröffentlicht wurde [4]. Die Übertragung dieser Methode in die technische Analyse mit dem Ziel, darauf basierende Handelssysteme zu entwickeln, hatte Manfred Dürschner [2] begonnen; seine Arbeit wurde dann von Rolf Wetzer [8] aufgegriffen.

Im Rahmen der Empirical Mode Decomposition werden einzelne Wellenfunktionen (engl. Intrinsic Mode Function) aus den Daten extrahiert; dabei sind die Funktionen mit der größeren Amplitude typischerweise diejenigen mit einer größeren Wellenlänge. Diese sind dementsprechend auch am glattesten und damit besteht die Chance, für diese Wellen eine Prognose zu erstellen. Da die Summe aller Wellenfunktionen wieder das ursprüngliche Signal (also den Kursverlauf) ergibt folgt die natürliche Annahme, dass die Summe dieser einzelnen Wellenprognosen dann auch eine Prognose für den Kursverlauf darstellt [1].

In dieser Arbeit wird zunächst das Verfahren der Empirical Mode Decomposition samt einer für den Prognose-Zweck wichtigen Anpassung vorgestellt. Für die Prognose der einzelnen Wellen kommen dann zwei verschiedene Ansätze in Frage: Einerseits eine Fortschreibung der Welle über eine gedämpfte Schwingung, was insbesondere für die kurzwelligen Wellenfunktionen sinnvoll erscheint. Andererseits können die langwelligen Komponenten als temporär stationär angesehen werden, so daß für diese eine Approximation mit einer harmonischen Schwingung geeignet erscheint. Die benötigten Prognose-Verfahren werden in Abschnitt 3 detailliert vorgestellt.

Zum Abschluss wird die präsentierte Methodik auf den Deutschen Aktienindex DAX angewandt und so für einige vergangene Jahre untersucht, wie der jeweils prognostizierte Jahresausblick zu dem tatsächlichen Kursverlauf des DAX passt. Im Ergebnis läßt sich festhalten, dass die längerfristige Tendenz, die mit diesem Verfahren prognostiziert wurde, sich als recht zutreffend erweist. Gleichwohl ist auch diese Technik nicht perfekt und besitzt auch eine klare Schwäche: Einem aktuell noch vorherrschenden Trend wird leider kein Potential zur Fortsetzung mehr eingeräumt. Zum Abschluss wird diese Technik auch auf die aktuelle Situation des DAX übertragen und ein Ausblick für das Jahr 2017 gewagt, um den Einsatz der vorgestellten Methodik für die Arbeit des technischen Analysten zu demonstrieren.

1.1 Hinweise zur beigefügten Excel-Datei

Die vorgestellten mathematischen Verfahren sind in der beigefügten Excel-Anwendung implementiert; diese Anwendung diente auch zur Erstellung der einiger Grafiken in dieser Arbeit. Mit dieser Excel-Implementierung wird dem interessierten technischen Analysten eine Möglichkeit bereitgestellt, sich ohne größeren Aufwand mit der Empirical Wave Decomposition und der hier vorgestellten Prognose-Technik auseinanderzusetzen.

Die Bedienung der Anwendung erfolgt über die Lasche „Bedienung“. Die zu analysierenden Marktdaten müssen dazu in den Spalten A und B dieser Lasche stehen. Der Button unter Punkt 1 funktioniert nur zusammen mit der Software TaiPan EoD (www.lp-software.de). Sofern diese Software bei einem Anwender installiert ist, kann über den VBA-Editor (zu Öffnen mit Alt+F11) dann unter Extras/Verweise der TTai-Pan 11.0 Access COM-Servereingebunden werden und der Programmcode in der Sub loadDataFromTaiPan (Modul Hauptsteuerung) wieder entkommentiert werden. Alternativ können die Spalten A und B manuell befüllt werden. Ohne diese vorgenannten Umstellungen hat der Button keine Auswirkung.

Unter Punkt 2 wird dann der hier vorgestellte Algorithmus ausgeführt, die Berechnung dauert dabei einige Sekunden. Es kann die Mindestanzahl der Sifting-Iterationen angegeben werden sowie der Prognose-Zeitraum. Ferner kann bestimmt werden, ob die Kurse direkt oder der Logarithmus der Kurse der Empirical Mode Decomposition unterzogen werden soll. In der Lasche „Forecast“ ist dann das Graphische dieser Analyse zu finden; die numerischen Ergebnisse stehen in der Lasche „EMD“, die immer automatisiert gefüllt wird.

Für die Betrachtung einer einzelnen Intrinsic Mode Function und deren Prognose gibt es dann noch den Button „zeichne einfache Extrapolation“, der die angegebene Intrinsic Mode Function und ihre Fortschreibung in der Zukunft zeichnet; das Ergebnis dieser Auswertung ist in der Lasche „SimpleForecast“ zu finden.

2 Die Empirical Mode Decomposition

2.1 Das Grundprinzip

Das Prinzip der Empirical Mode Decomposition beruht darauf, immer zunächst die kurzweiligste Schwingung aus einem Signal zu identifizieren. Zur Veranschaulichung dieses Vorgehens dient das folgende Flussdiagramm:

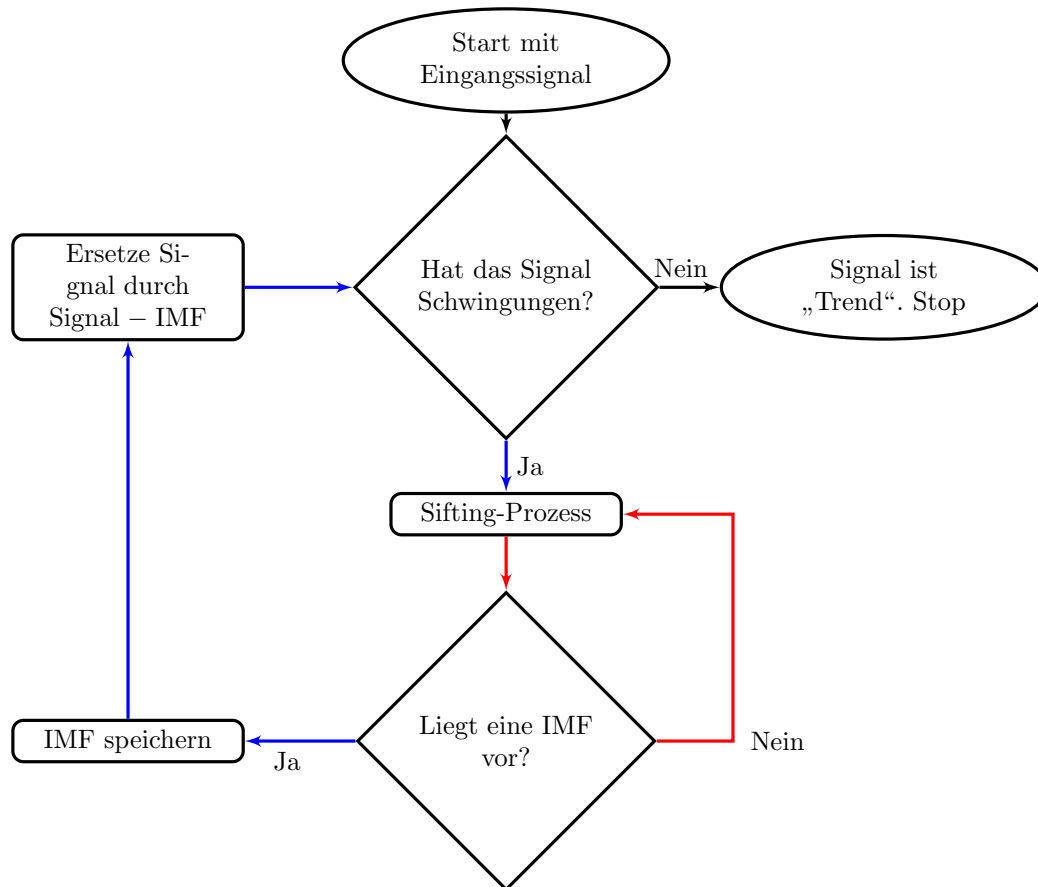


Abbildung 1: Flussdiagramm zur Erläuterung des EMD-Algorithmus

Die Verarbeitung des Signales (beispielsweise des Kursverlaufes des DAX) erfolgt in zwei ineinander verschachtelten Schleifen. Die äußere, blaue Schleife wird so lange durchlaufen, bis das Signal keine Schwingung mehr enthält. Das formale Kriterium ist dabei recht einfach: Solange das Signal noch mindestens ein lokales Maximum und ein lokales Minimum¹ besitzt, wird die Verarbeitung in der blauen Schleife vorgenommen. Mit jedem Durchlauf dieser äußeren Schleife wird eine neue Intrinsic Mode Function (IMF) identifiziert; danach wird diese IMF von dem Signal abgezogen und dann weiter verarbeitet. Am Ende bleibt eine nichtschwingende Trendkomponente übrig. Aus der Konstruktion wird unmittelbar klar, dass das ursprüngliche Signal genau der Summe aus der Trendkomponente und allen identifizierten Intrinsic Mode Functions entspricht!

Die innere Schleife (rot dargestellt) dient zur Identifikation der nächsten, kurzweiligsten Schwingung in dem Signal. Dazu wird ein Prozess zum Herauswaschen der kurzweiligen Schwingung so lange durchlaufen, bis eine saubere Intrinsic Mode Function (IMF) vorliegt. Zur Definition einer sauberen Intrinsic Mode Function gibt es ein klares Kriterium: Die lokalen Maxima sollen immer oberhalb der Nulllinie und die lokalen Minima immer unterhalb der Nulllinie liegen. Im Ergebnis gilt für eine IMF, dass sich die Anzahl der Nulldurchgänge und der Anzahl der lokalen Extrema maximal um 1 unterscheidet. Desweiteren besteht noch ein weiches Kriterium: Ein Durchlauf des Sifting-Prozesses wird diese IMF nicht mehr stark ändern; der Sifting-Prozess wurde also mehrmals durchlaufen und das Ergebnis ist stabil.

¹Ein lokales Maximum (Minimum) ist ein Datenpunkt, der größer (kleiner) ist als der Funktionswert des linken und rechten Nachbarn ist. Die beiden Randpunkte des Signales sind nie ein lokales Extremum, da sie nur einen benachbarten Datenpunkt besitzen.

Für eine algorithmische Umsetzung dieses weichen Kriteriums ist eine Präzisierung nötig. Für im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen wurde die Frage „Liegt eine IMF vor?“ genau dann bejaht, wenn

- Der Sifting-Prozess pro IMF mindestens 5 mal durchlaufen wurde, und
- Das harte Kriterium $Abs(\text{Anzahl Nulldurchgänge} - \text{Anzahl lokaler Extrema}) \leq 1$ wurde 3 mal in Folge erfüllt.

2.2 Der Sifting-Prozess

In dem vorgestellten Flussdiagramm steht der Sifting-Prozess an zentraler Stelle und wird nun erläutert. Das Ziel dieses Prozesses ist es, die kurzweiligste Schwingung aus dem Signal zu isolieren. Dazu muss dieser Prozess wiederholt angewandt werden. Mit den Vokabeln eines technischen Analysten wird der Prozess wie folgt beschrieben: Es werden zunächst Bänder für das Signal bestimmt. Der Mittelwert aus dem oberen und unterem Band definiert einen Durchschnitt und es wird ein Oszillator aus der Abweichung des Signales zu diesem Durchschnitt bestimmt. Dieser Oszillator ist das Ergebnis des Sifting-Prozesses.

Die mathematische und genauere Definition des Sifting-Prozesses lautet folgendermaßen:

1. Bestimmung des oberen Bandes

Es werden alle lokalen Maxima des Eingangssignales bestimmt. Durch diese wird ein kubischer Spline² mit natürlichen Randbedingungen gelegt.

2. Bestimmung des unteren Bandes

Das untere Band wird analog zu dem oberen Band bestimmt, indem ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen durch die lokalen Minima des Eingangssignales gelegt wird.

3. Bestimmung der Mittellinie

Die Mittellinie wird als arithmetisches Mittel der beiden zuvor bestimmten Bänder berechnet.

4. Berechnung des Kandidaten zur Intrinsic Mode Function

Der Kandidat für die Intrinsic Mode Function ergibt sich aus der Differenz von Eingangssignal und Mittellinie. Ist dieser Kandidat keine IMF nach dem in Abschnitt 2.1 genannten Kriterien, so dient der Kandidat als Eingangssignal für die nächste Iteration dieses Prozesses.

Zur Verdeutlichung dieses Algorithmus wird das Beispiel aus [5] aufgegriffen und der erste Sifting-Durchlauf anhand des nachfolgenden Schaubildes erläutert. In dem Signal (blau) werden zunächst die lokalen Hochpunkte bestimmt und dann wird ein Spline durch diese Punkte gelegt (rot, oberhalb der Signallinie). Analog dazu wird das untere Band berechnet, indem ein Spline durch die lokalen Tiefpunkte gelegt wird (rot, unterhalb der Signallinie). Die Mittellinie (schwarz) wird als Mittelwert der beiden roten Bänder berechnet. Der Kandidat für eine IMF (grün) ergibt sich dann aus der Differenz des Signales (blau) und der Mittellinie (schwarz).

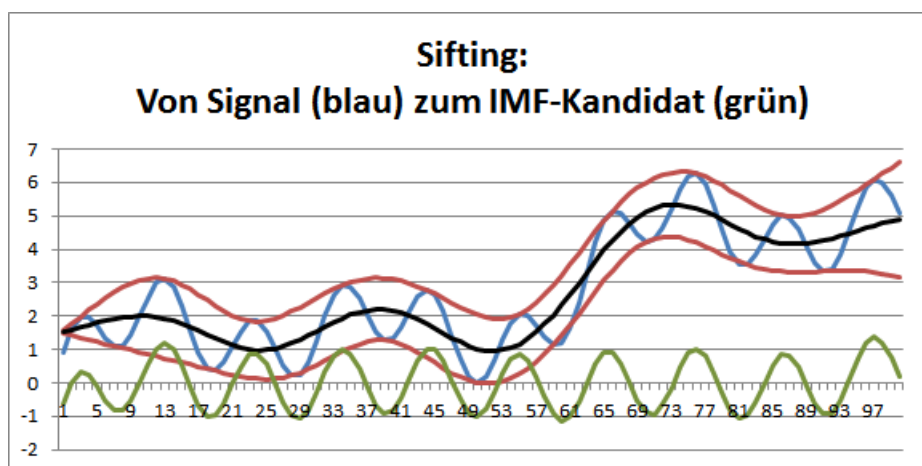


Abbildung 2: Erläuterung des Sifting-Prozesses

²Für die Definition und die Berechnung eines kubischen Splines wird beispielsweise auf [7] verwiesen. Anschaulich gesprochen ist der Spline eine glatte Kurve durch die angegebenen Punkte.

2.3 Stabilisierung am Rand

Die Bestimmung des oberen und unteren Bandes mit einem kubischen Spline hat ein Problem, auf das schon die Autoren der EMD in ihrer Originalarbeit [4] hingewiesen haben. Am rechten und linken Rand wird dieser Spline in der Regel entweder stark ansteigen oder stark abfallen, da dieses Polynom dritten Grades nicht mehr an einem weiteren Punkt fixiert ist. In der Konsequenz sind dann die auftretenden Intrinsic Mode Functions auch am Rand stark ansteigend und weisen dort dann kein oszillierendes Verhalten mehr auf. In dem nachfolgendem Beispiel ist das potentielle Verhalten der Splines zu erkennen, am linken Rand berühren sich die beiden Bänder, da das obere Band stark nach unten dreht. Am rechten Rand entfernen sich die beiden Bänder von dem eigentlichen Signalbereich. Beides entspricht nicht der Erwartung:

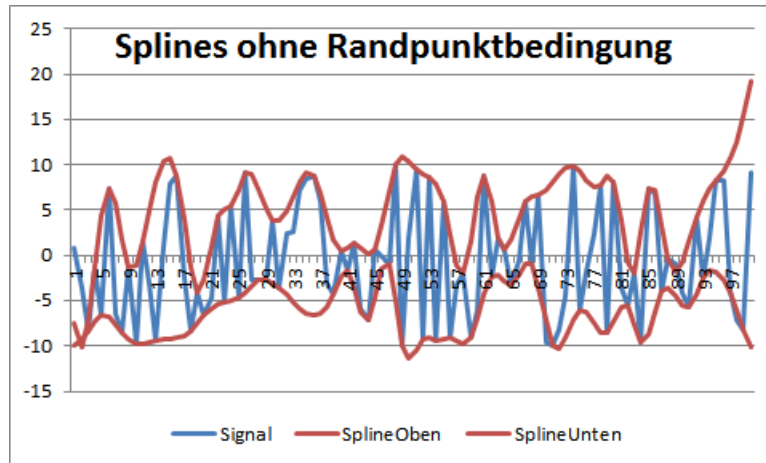


Abbildung 3: Spline ohne Randpunktbedingung

Damit auch am Rand - insbesondere ist bekanntlich gerade der rechte Rand in der technischen Analyse relevant - der sifting-Prozess eine saubere Schwingung ermittelt, müssen die Bänder auch bis zum Rand sinnvoll erweitert werden. Das erfolgt dadurch, dass zu der Menge der Punkte, durch die der Spline gelegt werden soll, jeweils ein Punkt am rechten und linken Rand hinzugefügt wird. Dabei ist der Wert für das obere/untere Band gegeben aus dem Maximum/Minimum des Signales am Rand und des nächst-liegenden lokalen Maximums/Minimums. Mit dieser Technik sehen dann die Bänder aus dem vorherigen Beispiel auch am Rand plausibel aus:

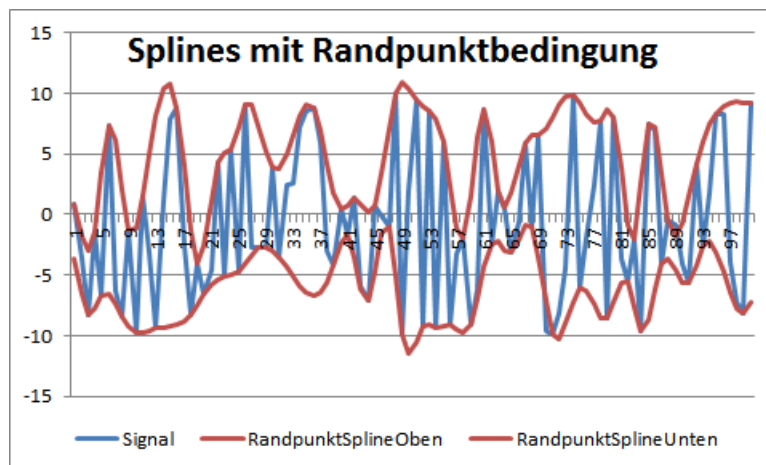


Abbildung 4: Spline mit Randpunktbedingung

Mit diesem Vorgehen kann nun auch die Abbruch-Bedingung der äußeren Empirical Mode Decomposition Schleife gut verstanden werden: Für die Bestimmung eines kubischen Splines sind mindestens 3 Punkte nötig. Gibt es noch ein lokales Maximum (Minimum) in dem Signal, so gibt es zusammen mit den beiden Randpunkten die nötige Mindestanzahl von Stützpunkten zur Bestimmung des oberen (unteren) Splines.

2.4 Beispiel: Anwendung auf Finanzzeitreihen

An dieser Stelle soll nun die erste Anwendung dieses Algorithmus auf die Kurszeitreihe des DAX (1988-2015) erfolgen. Über diesen langen Zeitraum ist der Kurs von 1.000 Punkte auf deutlich über 10.000 Punkte angestiegen; damit sind die Ausschläge gemessen in Punkten in der jüngeren Vergangenheit größer als sie es früher bei niedrigeren Index-Ständen waren. Dementsprechend wird auf die relative Veränderung des DAX abgestellt. Als Eingangss-Signal für den EMD-Algorithmus dient daher nicht der DAX selbst, sondern die logarithmierte Zeitreihe. Damit wird erreicht, dass die Amplituden in den Intrinsic Mode Functions nicht allein aufgrund des höheren Kursniveaus ansteigen.

Am Beispiel der 6. IMF des DAX (blau) bzw. $\log(\text{DAX})$ (rot) in der nachfolgenden Grafik wird das nochmal ersichtlich. Die blaue Welle besitzt erst eine sehr kleine Amplitude (ca. 50 Punkte) und erreicht in der jüngeren Vergangenheit eine 20 mal so große Amplitude in Höhe von 1000 Punkten. Auf der logarithmierten Skala gibt es zwar auch Unterschiede in der Amplitude, aber die Größenordnung ist über die Jahrzehnte identisch:

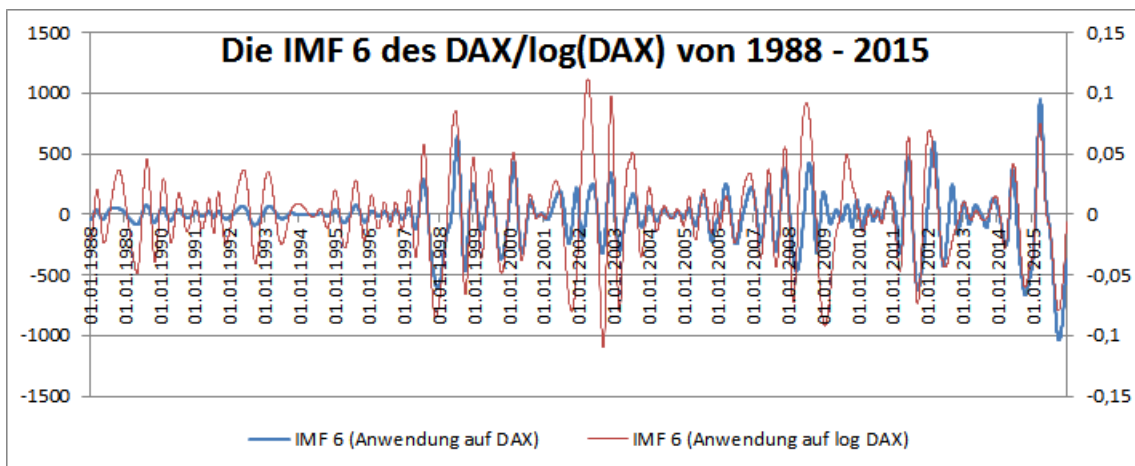


Abbildung 5: Begründung für die Betrachtung der logarithmierten Kurszeitreihe

In der gesamten weiteren Arbeit wird daher nur die logarithmierte Zeitreihe der Empirical Mode Decomposition unterzogen. Bei der Betrachtung des DAX im oben genannten Zeitraum werden 9 Intrinsic Mode Functions identifiziert, die nachfolgend abgebildet werden um dem Leser einen ersten Eindruck über diese Schwingungen zu vermitteln. Die kurzwelligen Intrinsic Mode Functions schwingen recht schnell, so dass auf dem Bild jede einzelne IMF nicht gut zu erkennen ist; gleichwohl ist jedoch erkennbar:

- Die höheren IMF besitzen eine größere Amplitude.
- Es gibt Phasen mit größerer Amplitude (Volatilitätscluster). Die Russland-Krise (1998), das Platzen der Dot-Com-Blase (2001-2003), der Lehman-Schock (2008) sowie die europäische Schuldenkrise (2011) sind in dem Bild an größeren Amplituden der IMF zu erkennen. Nach einer Krise bildet sich die Amplitude jedoch wieder auf ein normales Maß zurück.
- Soweit in der Darstellung erkennbar (insbesondere also für IMF 5 und 6) weisen die Schwingungen eine relativ stabile Wellenlänge auf.

Die langwelligen IMF besitzen eine deutlich größere Amplitude (siehe Skalen der Graphen), aber auch diese weisen ein typisches Wellenverhalten auf. Erwartungsgemäß sind diese Wellen nicht ganz regelmäßig, da die Methodik darauf abgestellt ist, Veränderungen in der Amplitude oder der Wellenlänge zu identifizieren.

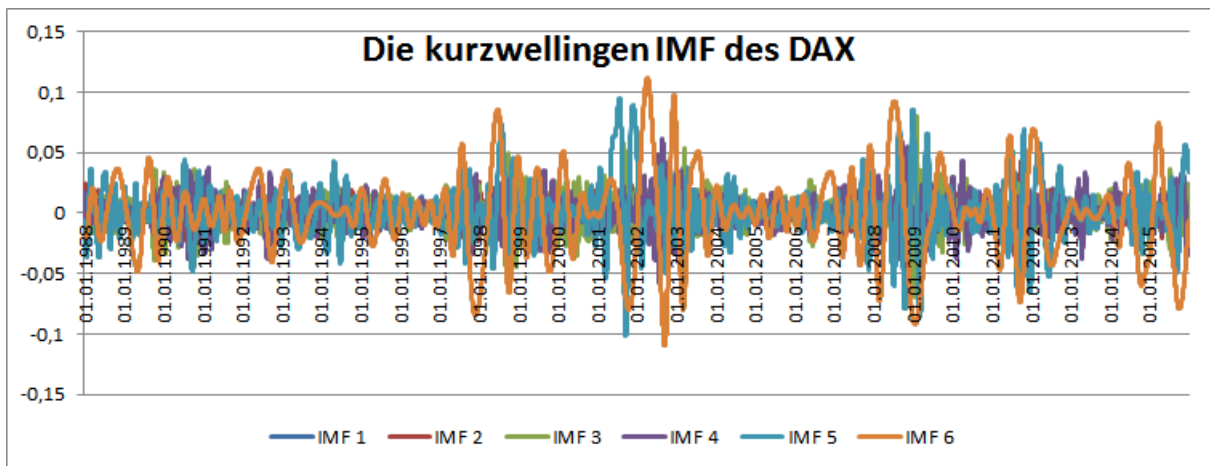


Abbildung 6: Die kurzwelligen IMF des DAX

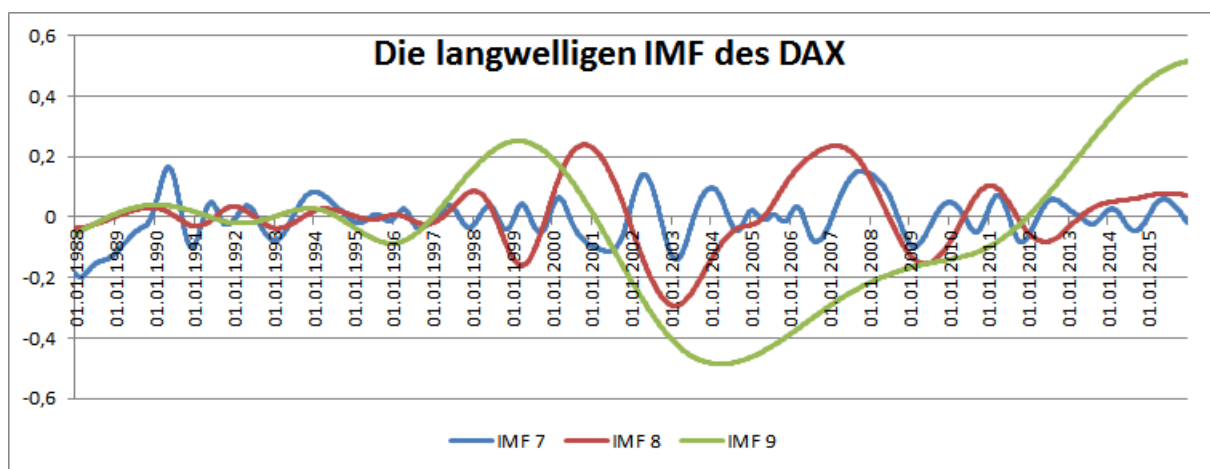


Abbildung 7: Die langwelligen IMF des DAX

3 Die Prognose einer Intrinsic Mode Function

3.1 Die verschiedenen Prognoseverfahren

Die Intention dieser Arbeit liegt darin, ein Verfahren vorzustellen, mit dem ein potentieller Kursverlauf prognostiziert werden kann. Die vorgestellte Empirical Mode Decomposition spielt dabei eine entscheidene Rolle. Anstatt den Kursverlauf direkt einer Vorhersage zu unterziehen, werden die einzelnen Schwingungs-Komponenten des Kurses sowie die Trend-Komponente prognostiziert. Für die Schwingungskomponenten ist ein naheliegender Ansatz, diese mit geeigneten Wellen fortzuschreiben; für die nicht-schwingende Trend-Komponente wird eine lineare Extrapolation unterstellt.

Der typische Prognose-Zeitraum bei einer Kursverlaufsprognose liegt bei einem Jahr. Da die einzelnen Schwingungskomponenten nicht stationär sind, also Amplitude und Wellenlänge sich im Zeitverlauf ändern können, ist eine Unterscheidung in zwei Prognose-Verfahren nötig. Bei den langwelligen Komponenten ist auch eine langsamere Änderung der Welleneigenschaften naheliegend: Ist die Wellenlänge groß gegenüber dem Prognose-Zeitraum (1 Jahr), so wird eine Approximation mit einer harmonischen Schwingung vorgenommen und diese fortgeschrieben. Für die hier vorgenommene Studie wurde dieser Prognose-Ansatz bei Wellenlängen von 2 oder mehr Jahren gewählt.

Bei den kurzwelligeren Schwingungen erscheint der Ansatz einer konstanten Fortschreibung der Amplitzude nicht geboten. Die zuvor gezeigten kurzfristigen Wellen in der EMD des DAX zeigten immer mal wieder Perioden von erhöhter Amplitude, die dann wieder auf ein Normalmaß zurückging. Ein solches Schwingungsverhalten ist in der Physik als gedämpfte Schwingung bekannt [3]. Diese wird nachfolgend jedoch so modifiziert, dass die Dämpfung so gewählt wird, dass die Schwingung in ihr durchschnittliches Verhalten überführt wird und nicht komplett abgebremst wird.

3.2 Die gedämpfte Schwingung

3.2.1 Physikalischer Exkurs

Eine ungedämpfte, harmonische Schwingung kann durch eine Sinus-Schwingung beschrieben werden:

$$X(t) = A \sin(\omega \cdot t) \quad (1)$$

Dabei bezeichnet ω die Kreisfrequenz und die Wellenlänge λ der Welle ist gegeben durch $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$. Für diese Schwingungsgleichung gibt es eine Darstellung als Differentialgleichung. Die Beschleunigung der Schwingung ist entgegengesetzt proportional zur Auslenkung und der Faktor F bezeichnet die Federstärke³:

$$\ddot{X}(t) = -FX(t) \quad (2)$$

Dabei bezeichnet $\ddot{X}(t)$ die zweite Ableitung von $X(t)$ und nachfolgend $\dot{X}(t)$ die erste Ableitung von $X(t)$. Ausgehend von der bekannten Schwingungsgleichung (1) können die beiden Ableitungen explizit angegeben werden:

$$\dot{X}(t) = A\omega \cos(\omega \cdot t) \quad (3)$$

$$\ddot{X}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega \cdot t) \quad (4)$$

Daraus folgt, dass für die Federkonstante die Beziehung $F = \omega^2$ gilt. Die in dieser Schwingung gespeicherte Energie E ist gegeben durch die Summe aus potentieller und kinetischer Energie

$$E = \frac{1}{2}FX^2(t) + \frac{1}{2}\dot{X}^2(t) \quad (5)$$

$$\text{bzw.} \quad E = \frac{1}{2}A^2\omega^2 \quad \text{für den Fall der harmonischen Schwingung} \quad (6)$$

Der allgemeinere Fall der gedämpften Schwingung wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{X}(t) = -FX(t) - D(t)\dot{X}(t) \quad (7)$$

beschrieben, dabei bezeichnet $D(t)$ die Dämpfung. Eine konstante Dämpfung $D > 0$ hat zur Folge, dass die Schwingung im Laufe der Zeit zur Ruhe kommt und ihre Energie komplett verloren geht. Das Ziel ist jedoch, eine Schwingung zu erzeugen, die sich zu einem mittleren Energiezustand \bar{E} hinbewegt, daher wird für $D(t)$ angenommen:

$$D(t) = \frac{1}{A^2\omega} (E(t) - \bar{E}) \quad (8)$$

Der Faktor in diesem Ansatz von D ist so gewählt, dass die Terme $F \cdot X$ und $D \cdot \dot{X}$ in Gleichung (7) die gleiche Größenordnung ($A\omega^2$) besitzen. Die aktuelle Energie $E(t)$ ergibt sich aus Gleichung (5), die mittlere Energie \bar{E} aus Gleichung (6). Besitzt diese Schwingung aktuell weniger Energie als \bar{E} , so treibt diese Art der Dämpfung die Schwingung auch wieder an.

3.2.2 Die Fortschreibung einer IMF als gedämpfte Welle

Der vorstehende Physik-Exkurs dient dazu, die Fortschreibung einer Intrinsic Mode Function zu ermöglichen. Aus der Historie der Welle läßt sich eine mittlere Wellenlänge λ und eine mittlere Amplitude A bestimmen. Aus der Wellenlänge λ ergibt sich unmittelbar die Kreisfrequenz ω und damit auch die Federkonstante $F = \omega^2$. Die mittlere Energie dieser Schwingung ist ferner gegeben durch $\bar{E} = \frac{1}{2}A^2\omega^2$. Damit sind alle Parameter für die Differentialgleichung der oben vorgestellten gedämpften Schwingung bekannt:

$$\ddot{X}(t) = -\omega^2 X(t) - \frac{1}{A^2\omega} (E(t) - \bar{E}) \dot{X}(t) \quad \text{mit} \quad (9)$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\omega^2 X^2(t) + \frac{1}{2}\dot{X}^2(t) \quad (10)$$

Diese Differentialgleichung kann numerisch gelöst werden und damit steht ein numerisches Verfahren für die Fortschreibung dieser Welle zur Verfügung. Als Startparameter wird der Endpunkt der Intrinsic Mode Function gewählt und die benötigte erste Ableitung $\dot{X}(t)$ wird numerisch ermittelt. Für die numerische Lösung dieser Gleichungen gibt es verschiedene Ansätze. In der beigefügten Excel-Anwendung wird diese Gleichung durch ein einfaches Euler-Schema gelöst, bei dem mit einer sehr feinen Zeitdiskretisierung gearbeitet werden muss, da ansonsten das Verfahren insbesondere bei kleinen Wellenlängen numerisch instabil sein kann.

³In dieser Betrachtung wird angenommen, dass die Masse des Schwingungskörpers 1 ist. Physikalisch korrekter formuliert bezeichnet F die Hooksche Federkonstante geteilt durch die Masse des Schwingungskörpers.

3.3 Die Fortschreibung einer IMF als harmonische Schwingung

Die Fortschreibung einer Intrinsic Mode Function als harmonische Schwingung erfolgt nur, wenn die Schwingung eine größere Wellenlänge besitzt und daher davon ausgegangen werden kann, dass sich die Frequenz oder Amplitude der Welle nicht so schnell ändert. Die Vorgehensweise ist dabei, das letzte Jahr der Intrinsic Mode Function durch eine harmonische Schwingung zu approximieren und dann mit der gefundenen Approximation fortzuschreiben. In Gleichung (1) wurde die harmonische Schwingung schon vorgestellt; in Abschnitt 3.2.1 spielte dabei die Phase der Welle jedoch keine Rolle. Diese ist nun relevant und daher ist die allgemeine Form der harmonischen Schwingung nun relevant:

$$X(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot t\right) + B \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot t\right) \quad (11)$$

Die Interpolation des letzten Jahres der Intrinsic Mode Function durch eine solche Schwingung erfordert die Kalibration von 3 Parametern: Die beiden Koeffizienten A und B der Winkelfunktionen sowie der Wellenlänge λ . Angenommen, die Wellenlänge λ sei bekannt, dann ist die Kalibration von A und B mit der Methode der kleinsten Quadrate leicht möglich wie in Abschnitt 3.3.1 gezeigt wird. Dabei werden A und B so gewählt, dass die Fehlerfunktion $F(A, B)$ minimal ist.

$$F(A, B) = \sum_{i=1}^N \left(A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot t_i\right) + B \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot t_i\right) - X_i \right)^2 \quad (12)$$

Dabei bezeichnen (t_i, X_i) mit $i = 1 \dots N$ die Stützpunkte der zu approximierenden Intrinsic Mode Function.

Zur Bestimmung der korrekten Wellenlänge λ wird $F(A, B)$ für verschiedene Wellenlängen minimiert und es wird diejenige Wellenlänge als Kalibrierungsergebnis verwendet, bei der die Fehlerfunktion den geringsten Wert besitzt. Für die Festlegung des Bereiches der Wellenlängen, die überprüft werden sollen, kann eine Schätzung der mittleren Wellenlänge aus dem Verlauf der Intrinsic Mode Function dienen.

Wenn die Interpolation gut ist, dann wird auch die Abweichung zwischen der Interpolation am rechten Rand und der Intrinsic Mode Function gering sein. Ist dieses jedoch nicht der Fall, so könnte dies ein Hinweis auf eine aktuelle Änderung der Welle sein und das unter Abschnitt 3.2 genannte Verfahren wird dann zur Fortschreibung der IMF empfohlen.

3.3.1 Methode der kleinsten Quadrate für die harmonische Schwingung

Gesucht sind die Parameter A und B , so dass die Funktion $F(A, B)$ minimal ist. Dazu ist es notwendig, dass die partiellen Ableitungen dieser Funktion 0 sind, es muss also gelten:

$$0 = \frac{\partial F(A, B)}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^N [A \sin(\omega \cdot t_i) + B \cos(\omega \cdot t_i) - X_i] \sin(\omega \cdot t_i) \quad (13)$$

$$0 = \frac{\partial F(A, B)}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^N [A \sin(\omega \cdot t_i) + B \cos(\omega \cdot t_i) - X_i] \cos(\omega \cdot t_i) \quad (14)$$

Dabei bezeichnet $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$. Dies ist ein lineares System, das wie folgt umgestellt werden kann:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \sin^2(\omega \cdot t_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\omega \cdot t_i) \cos(\omega \cdot t_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin(\omega \cdot t_i) \cos(\omega \cdot t_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\omega \cdot t_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_i \sin^2(\omega \cdot t_i) \\ \sum_{i=1}^N X_i \cos^2(\omega \cdot t_i) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Die Lösung dieses linearen Systems ist einfach, denn es gilt:

$$\text{Die Inverse von } \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \text{ lautet } \frac{1}{WZ - XY} \begin{pmatrix} Z & -X \\ -Y & W \end{pmatrix} \quad (16)$$

3.4 Die Prognose der schwingungsfreien Komponente

Die Prognose der schwingungsfreien Komponente ist recht einfach und erfolgt durch eine Gerade. Diese Gerade ist am Endpunkt der Intrinsic Mode Function aufgehängt und der einzige dann noch zu bestimmende Parameter

ist die Steigung dieser Graden. Wird auch hier das Verfahren der kleinsten Quadrate angewandt, so ergibt sich die Steigung S dieser Graden mit

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (X_N - X_i)(t_i - t_N)}{\sum_{i=1}^{N-1} (t_i - t_N)} \quad (17)$$

Dabei bezeichnen (t_i, X_i) mit $i = 1 \dots N$ die Stützstellen der Trend-Komponente und (t_N, X_N) bezeichnet ihren rechten Randpunkt, d.h. den letzten bekannten Wert.

4 Rückblickende Anwendung des vorgestellten Prognose-Verfahrens am Beispiel des Deutschen Aktienindex

4.1 Beschreibung des Prognoseverfahren

Für das vorgestellte Prognoseverfahren sind die folgenden Schritte nötig. Eine längeren Kurszeitreihe $K(t)$ wird logarithmiert $X(t) := \ln K(t)$ und $X(t)$ dient dann als Eingangssignal für die Empirical Mode Decomposition. Damit ergibt sich die folgende Zerlegung:

$$X(t) = \text{Trend}(t) + \sum_{i=1}^n \text{IMF}_i(t) \quad (18)$$

Die einzelnen n Intrinsic Mode Functions IMF_i sowie die Trendkomponente Trend werden mit den vorgestellten Prognoseverfahren fortgeschrieben; diese werden mit $\widetilde{\text{IMF}}_i$ und $\widetilde{\text{Trend}}$ bezeichnet. Für die Prognose des Kursverlaufes ergibt sich damit:

$$\tilde{K}(t) = \exp \left(\widetilde{\text{Trend}}(t) + \sum_{i=1}^n \widetilde{\text{IMF}}_i(t) \right) \quad (19)$$

In den nachfolgenden Grafiken wird dieser so ermittelte prognostizierte Kursverlauf gepunktet dargestellt. Da in diesem Kursverlauf die Fortschreibung für jede einzelne Komponente eingeht, kann schon der Fehler in der Prognose einer Komponente zu einer Abweichung führen. Da die zu prognostizierenden Wellen nicht-stationär sind, sich ihre Amplituden oder Wellenlängen permanent ändern können, ist natürlich keine perfekte Vorhersage zu erwarten.

Ferner wird die längerfristige Grundschwingung ermittelt und prognostiziert. Dabei werden nur die drei⁴ größten Wellen sowie die Trendkomponente aus der vorstehenden Prognose verwendet - die kurzwelligeren Wellen besitzen in der Regel eine kleinere Amplitude und sind daher für größere Tendenz-Aussagen nicht ganz so relevant. Dieser Hauptmoden-Verlauf $\tilde{H}(t)$, auch als längerfristige Tendenz bezeichnet, wird nachfolgend mit einer glatten, durchgezogenen Linie veranschaulicht und wie folgt berechnet:

$$\tilde{H}(t) = \exp \left(\widetilde{\text{Trend}}(t) + \sum_{i=n-2}^n \widetilde{\text{IMF}}_i(t) \right) \quad (20)$$

Damit entstehen im Chartbild jeweils konkrete Linien, diese sind jedoch nicht als exakte Vorhersagen zu sehen sondern sollen dazu dienen, einen potentiellen Kursverlauf des nächsten Jahres zu bestimmen. Anhaltspunkte für eine solche Analyse sind dabei insbesondere

- der Verlauf der Hauptmoden $\tilde{H}(t)$,
- Bereiche besonders starker Änderungen in der Kursverlaufsprognose $\tilde{K}(t)$

Für die nachfolgenden Grafiken wurden jeweils die Kurse bis zu dem Jahresende eines Jahres vorgegeben und mit diesen Daten wurde dann die Prognose wie beschrieben erstellt. Mit den beiden roten Linien ist dann das Ergebnis der Prognose für das Folgejahr zu sehen und der tatsächliche Kursverlauf des DAX wird für das Jahr mit angezeigt. Insgesamt ist in der nachfolgenden Übersicht zu erkennen, dass die größte Schwäche dieser Methodik darin besteht, dass ein aktuell vorherrschender Trend sofort im Rahmen der Kursverlaufsprognose beendet wird. Ein solcher, kurzfristiger Trend hat in der Regel die Ausdehnung der Amplituden oder Wellenlängen einer (oder auch mehrerer) Wellen zur Folge, die mit den vorgestellten Verfahren nicht abgedeckt werden. Insofern ist bei einem aktuell vorherrschenden Trend mit einer kurzfristigen Fortsetzung zu rechnen, bevor dann der Umkehreffekt aus den Wellen eintritt.

⁴Die Zahl 3 wird in Anlehnung an Charles Dow gewählt, der postuliert hat, dass es drei Trendarten gibt: Den primären, sekundären und tertiären Trend.

4.2 Übersicht über die tatsächlichen und prognostizierten Kursverläufe

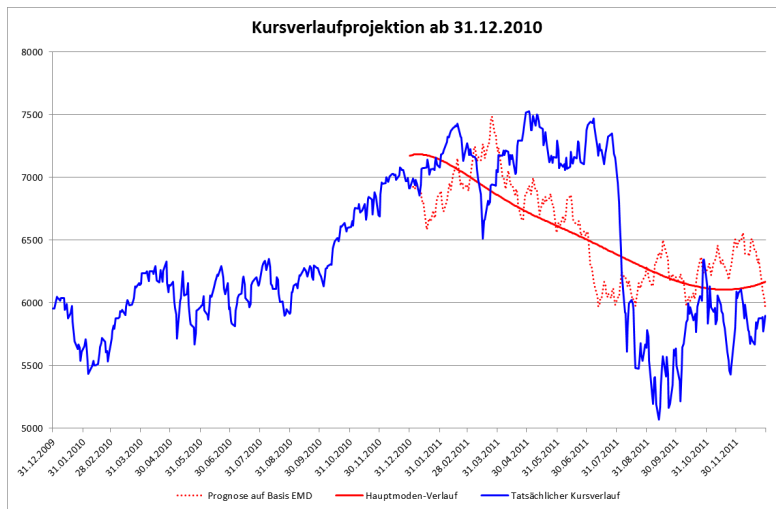


Abbildung 8: DAX Prognose 2011

Die längerfristige Tendenz geht von seitwärts nach abwärts über und fängt sich wieder im 4. Quartal. Die angekündigte Trendumkehr findet nicht sofort statt und es kommt folgerichtig zu einer zeitlichen Verschiebung von ca. 1 Monat - sowohl was den Hochpunkt der Bewegung als auch den Einbruch im Spätsommer angeht.

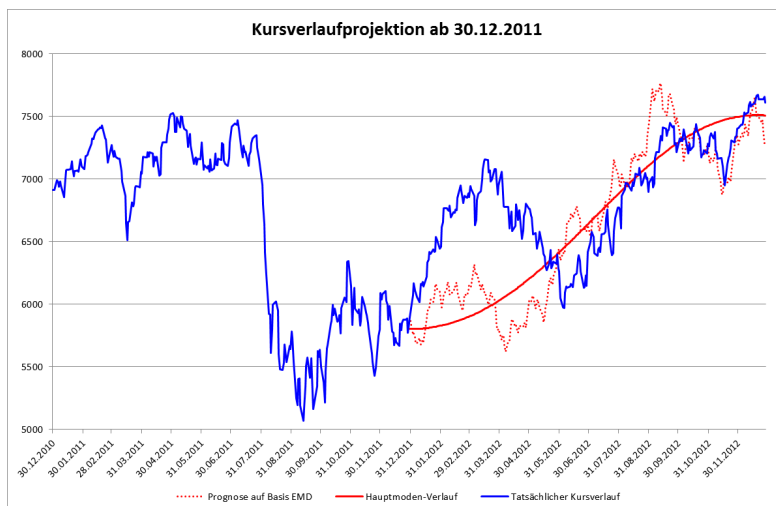


Abbildung 9: DAX Prognose 2012

Die längerfristige Tendenz deutet für das Jahr eine klare Aufwärtsbewegung an und auch die Verlaufsprognose trifft den tatsächlichen Verlauf recht gut, einzig der DAX Aufschwung im ersten Quartal wird vom Ausmaß her unterschätzt.

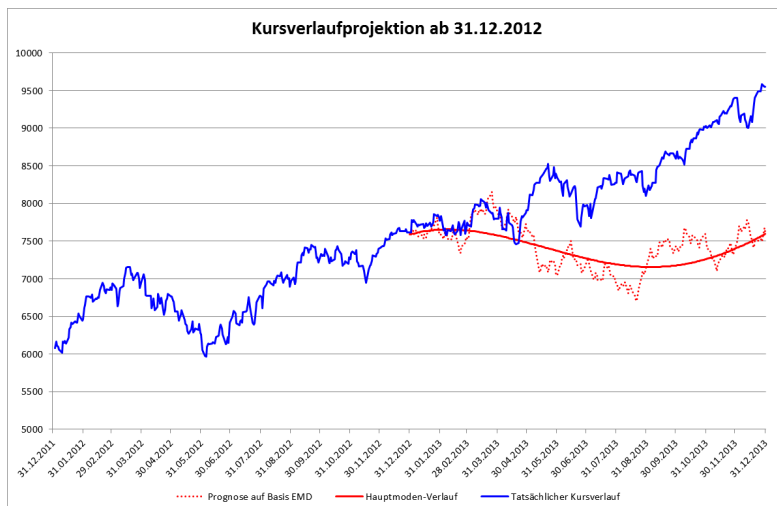


Abbildung 10: DAX Prognose 2013

Für das Jahr 2013 zeigt die längerfristige Tendenz seitwärts und ist erst im 4. Quartal wieder aufwärtsgerichtet. Tatsächlich nimmt die Aufwärtsbewegung des DAX zum Jahresende hin zu, und auch der Kursverlauf im ersten Quartal wird gut prognostiziert, aber insgesamt enttäuscht in diesem Jahr die Prognosetechnik.

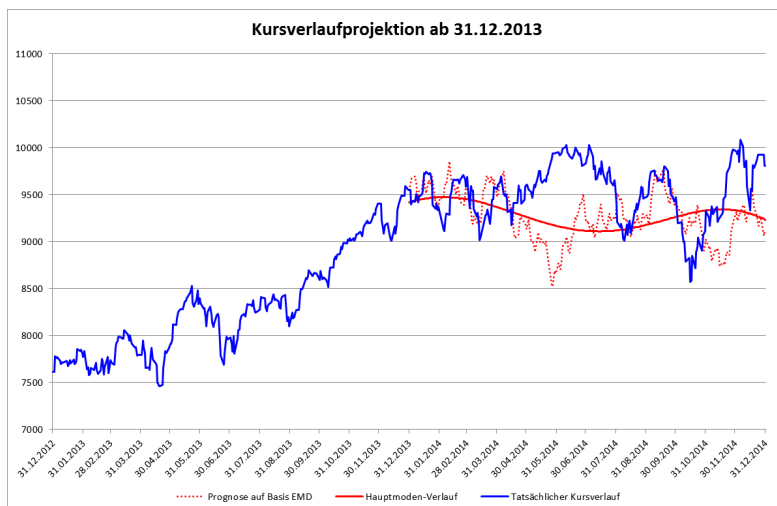


Abbildung 11: DAX Prognose 2014

Für das Jahr 2014 ist die längerfristige Tendenz mit nur leichten Schwankungen seitwärts gerichtet. Diese Seitwärtstendenz trifft dann auf den DAX zu. Die Kursverlaufsprognose zeigt im Frühjahr ein Tiefpunkt, der so nicht eintritt; aber der Verlauf im ersten Quartal und auch der Hochpunkt im August werden gut getroffen.

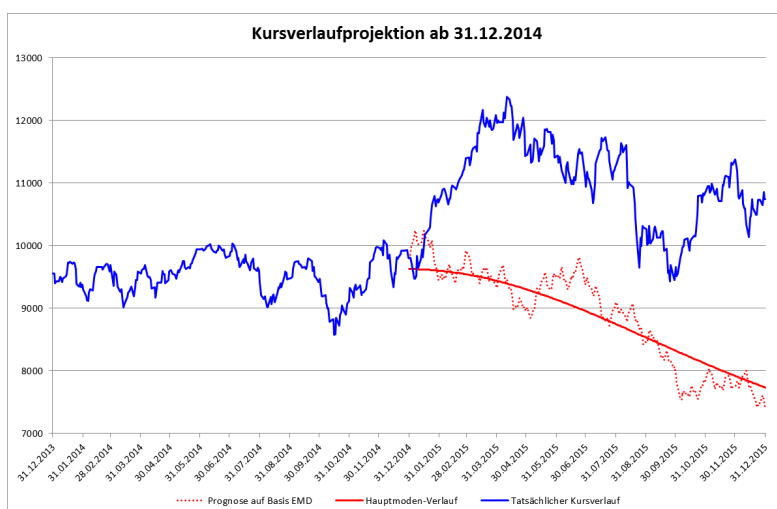


Abbildung 12: DAX Prognose 2015

Im Jahr 2015 wird die schon angesprochene Schwäche des Verfahrens deutlich sichtbar: Die Ausdehnung der kurzfristigen Bewegung nach oben findet sehr stark und über das gesamte erste Quartal statt. Dieses kann von der hier vorgestellten Methode nicht erfasst werden. Ist dieser Impuls jedoch abgearbeitet, so setzt sich dann auch hier die negative und zunehmend bärische Tendenz auch in dem Kursverlauf des DAX durch, der seinen Jahres-Höhepunkt mit dem Beenden des ersten starken Impulses erreicht.

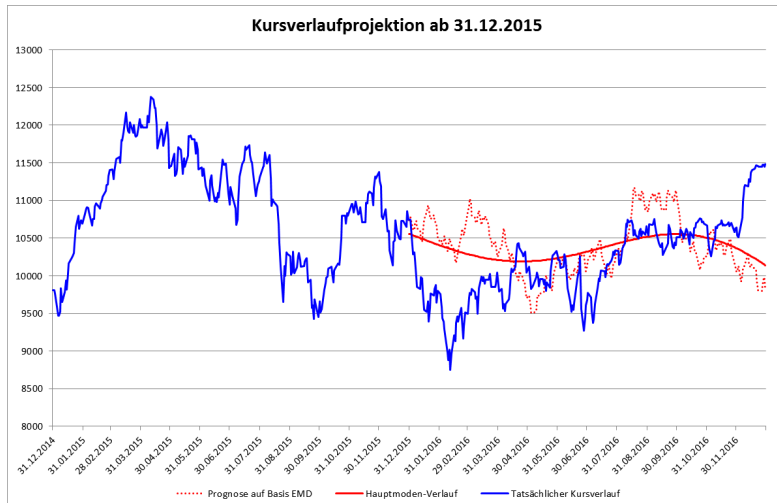


Abbildung 13: DAX Prognose 2016

Die Tendenz-Bewegung für 2016 verlief mit leichten Schwankungen seitwärts und entspricht damit auch im Wesentlichen dem DAX-Verlauf, auch wenn es zunächst einen starken Abwärtssimpuls zu Jahresbeginn gab. Die Trump-Rally im Dezember wurde jedoch von dem Prognose-Verfahren nicht erwartet.

4.3 Der Ausblick für 2017

Zum Abschluss soll die Prognose-Erstellung mit dieser Technik verdeutlicht werden. Der Verlauf des DAX aus 2016 sowie die Prognoseverläufe sehen zum Stichtag 30.12.2016 folgendermaßen aus: Dieses Bild zeigt die

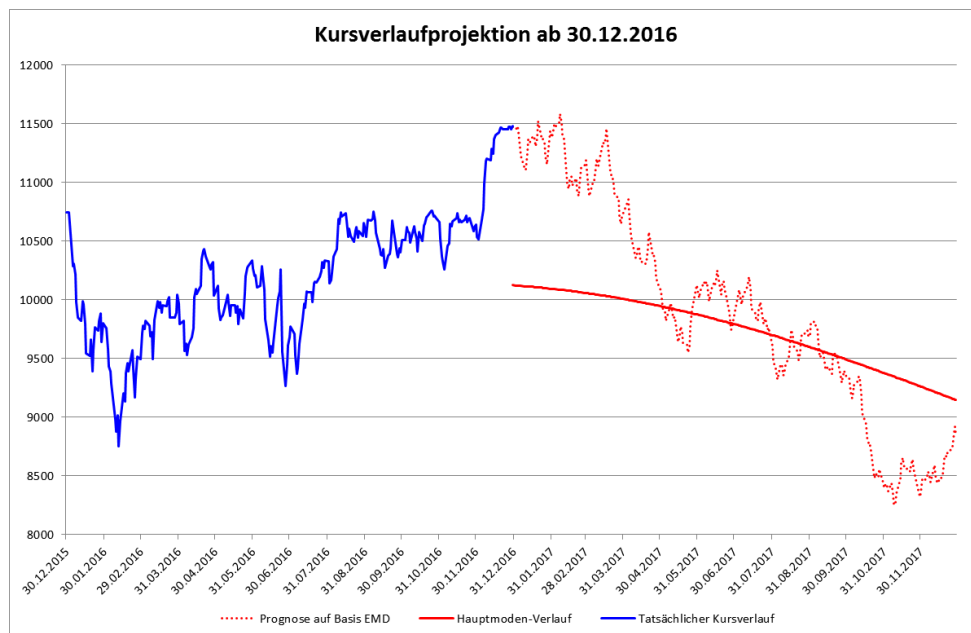


Abbildung 14: DAX Prognose 2017

folgenden Punkte:

- Die langfristige Tendenz ist abwärtsgerichtet und die Abwärtstendenz nimmt im Jahresverlauf zu.
- Die Kursverlaufsprognose zeigt zwei deutliche Abwärtsschübe mit Tiefpunkten im Mai und November
- Der vorherrschende Aufwärtstrend wird von der Kursverlaufsprognose sofort umgekehrt.

Daraus ergibt sich dann die nachfolgende Kursverlaufsprognose für den Deutschen Aktien-Index:

Da die sofortige Umkehr eines Trends eher eine Schwäche dieser Prognose darstellt, ist zunächst mit einem weiteren Anstieg der Kurse zu rechnen, insbesondere da die Trump-Rally auch schon in dem Ausblick für 2016 unverhofft kam. Damit ist auch mit einer zeitlichen Verschiebung der

Kursprognose zu rechnen, vermutlich vergleichbar mit dem Effekt aus der Prognose für das Jahr 2015. Im weiteren Verlauf des Jahres stimmt die abwärtsgerichtete langfristige Tendenz jedoch pessimistisch: Es ist mit einer sich zunehmend beschleunigten Abwärtsbewegung zu rechnen. Aus der Kursverlaufsprognose kann diese Abwärtsbewegung in zwei Abwärtsschübe eingeteilt werden: Der erste Kursrückgang setzt voraussichtlich im Frühjahr ein und von einem weiteren beschleunigten Abwärtsschub muss im Herbst ausgegangen werden. Ob es zu einer kleinen Jahresend-Rally kommt, so wie die Kursverlaufsprognose es ankündigt ist noch offen: Da aufgrund des aktuell noch vorherrschenden Aufwärtstrends mit einer zeitlichen Verschiebung der Prognose zu rechnen ist, könnte sich die am rechten Rand angekündigte Erholung auch noch in das Jahr 2018 verschieben.

5 Quellenverzeichnis

Literatur

- [1] Sarah Abadan, Ani Shabri: Hybrid Empirical Mode Decomposition-ARIMA for Forecasting Price of Rice *Applied Mathematical Sciences* Vol 8, No. 63, Seiten 3133-3143, (2014).
- [2] Manfred G. Dürschner: *Technische Analyse mit EMD: Die Anwendung der EMD auf Indizes, Rohstoffe, Währungen und Aktien* Wiley-VCH Verlag (2013).
- [3] Christian Gerthsen, Helmut Vogel: *Physik*, 17. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1993).
- [4] Norden E. Huang, Zheng Shen, Steven R. Long, Manli C. Wu, Hsing H. Shih, Quanan Zheng, Nai-Chyuan Yen, Chi Chao Tung, Henry H. Liu: The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, *Proceedings of the Royal Society London* (1998) **454**, Seiten 903-995.
- [5] Donghoh Kim, Hee-Seok Oh: EMD: A Package for Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum, *The R Journal*, (May 2009) **1**, Seiten 40-46.
- [6] John J. Murphy: *Technische Analyse der Finanzmärkte: Grundlagen, Strategien, Methoden, Anwendungen* (4. Ausg.). München: Finanzbuch Verlag GmbH (2007).
- [7] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* (2. Ausg.) Cambridge University Press, (1992).

Konferenzbeiträge

- [8] Rolf Wetzler: Cycles in Trading - Empirical Mode Decomposition, *IFTA-Konferenz Sydney*, (2016).

Marktdaten-Quellen

Verwendete Kursdaten wurden über die vwd group (www.vwd.com) bezogen. Die Schnittstelle der Daten nach Microsoft Excel ist Bestandteil der Software TaiPan End-of-Day (www.lp-software.de).