

Das kohärente Marktportfolio

Beitrag zum VTAD-Award 2019

Dr. Oliver Reiß *

E-Mail: oliver-reiss@freenet.de

April 2019

Zusammenfassung

Ausgangslage der vorliegenden Arbeit ist die Moderne Portfoliotheorie von Markowitz und Sharpe, die den Begriff des *Marktportfolios* geprägt haben. Dabei verwenden sie für die Risikomessung die Standardabweichung – ein Ansatz der spätestens seit der Einführung *kohärenter Risikomaße* von Artzner, Dealbaen Eber und Heath nicht mehr zeitgemäß ist. Daher wird in der vorliegenden Arbeit ein kohärentes Risikomaß verwendet um ein *kohärentes Marktportfolio* zu definieren. Ein weiterer Kritikpunkt an der Modernen Portfoliotheorie ist, dass es keine Vorgabe für die Renditeschätzung von Wertpapieren gibt. Dazu wird in dieser Arbeit gemäß dem Motto „The trend is your friend“ eine Renditeschätzung mittels Technischer Analyse vorgenommen. Der Backtest des so konstruierten *kohärenten Marktportfolios* auf dem Europäischen und Amerikanischem Markt zeigt, dass dieses Portfolio auch einen praktischen Mehrwert liefert.

* Der Autor ist Diplom-Physiker und Inhaber der Titel Certified Financial Technican (CFTe) und Master of Financial Technical Analysis[®] (MFTA) der International Federation of Technical Analysts (IFTA). Er arbeitet als freiberuflicher Unternehmensberater mit dem Schwerpunkt Risikocontrolling & IT in der Finanzbranche und unterstützt die Vereinigung Technischer Analysten Deutschlands e.V. (VTAD) als stellvertretender Regionalmanager der Regionalgruppe Düsseldorf.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das Marktportfolio der Modernen Portfoliotheorie	3
2.1	Die Effizienzgrenze ohne Portfolio-Beschränkungen	3
2.2	Das Modell bei einem Verbot von Leerverkäufen	5
2.3	Einführung einer deterministischen Anlage: Das Sharpe-Ratio und das Marktportfolio	6
3	Kohärente Risikomaße	7
3.1	Die Definition kohärenter Risikomaße	7
3.2	Eigenschaften bekannter Risikomaße	8
3.3	Die Berechnung des Expected Shortfall zum 95% -Quantil und Risikohorizont von einer Woche	9
3.4	Die Risikoberechnung unter Verwendung einer Benchmark	10
4	Die trendfolgende Rendite-Schätzung	11
4.1	Schätzung auf Basis Rate-of-Change	11
4.2	Schätzung mittels linearer Regression	11
5	Das kohärente Marktportfolio	12
5.1	Definition	12
5.2	Die Eindeutigkeit des kohärenten Marktportfolios	13
5.3	Bestimmung des kohärenten Marktportfolios	14
6	Ein auf dem kohärente Marktportfolio basierendes Handelssystem	14
6.1	Vorstellung des Systems	14
6.2	Backtest der Anlage in kohärenten Marktportfolios	15
6.3	Backtest im Europäischen Markt	15
6.4	Backtest im Amerikanischen Markt	16
7	Zusammenfassung	17
	Quellenverzeichnis	18
A	Beweise der Lemmata aus 3.2	19
A.1	Beweis von Lemma 1	19
A.2	Beweis von Lemma 2	19
A.3	Beweis von Lemma 3	20
A.4	Beweis von Lemma 4	20

Abbildungsverzeichnis

1	Die Einzelaktien, die Effizienzlinie ohne Restriktionen und Portfolios mit Leerverkaufsverbot	5
2	Portfolio-Auswahl unter Existenz einer risikofreien Anlage und die Maximierung des Sharpe-Ratios	6
3	Das kohärente Marktportfolio	12
4	Die Menge der erreichbaren Portfolios ist konvex	13
5	Backtest Europäischer Markt und Rendieschätzung mittels Rate of Change	15
6	Backtest Europäischer Markt und Rendieschätzung mittels linearer Interpolation	15
7	Backtest Amerikanischer Markt und Rendieschätzung mittels Rate of Change	16
8	Backtest Amerikanischer Markt und Rendieschätzung mittels linearer Interpolation	17

Tabellenverzeichnis

1	Die ETFs für den Backtest im Europäischen Markt	15
2	Kennzahlen des Backtest im Europäischen Markt	16
3	Die ETFs für den Backtest im Amerikanischen Markt	16
4	Kennzahlen des Backtest im Amerikanischen Markt	17

1 Einleitung

Die „Moderne Portfoliotheorie“ basiert auf der Arbeit „Portfolio Selection“ [7] von Harry Markowitz, in der das Problem der Zusammensetzung eines optimalen Portfolios behandelt wird. Dabei wird angenommen, dass es nur risikobehaftete Anlagen gibt und das optimale Portfolio für einen Investor ist anhängig von dessen Risiko-Rendite-Präferenz. Ausgehend von diesem Ansatz hat William Sharpe durch Einführung einer Geldmarkt-Anlage dann ein sogenanntes *Marktportfolio* definiert, das unabhängig von der Präferenz eines Anlegers ist und welches das Sharpe-Ratio maximiert [9]. Die Anlegerpräferenz entscheidet dann nur noch in der Gewichtung zwischen der Anlage im Geldmarkt und diesem Marktportfolio. Auf diesem historischen Ergebnis baut diese Arbeit auf und es wird daher in Abschnitt 2 rekapituliert.

Die wegbereitende Forschung von Harry Markowitz und William Sharpe wurde 1990 mit dem von der Schwedischen Zentralbank gestifteten Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften geehrt, den sie zusammen mit Merton Miller erhielten. Gleichwohl sind die Annahmen, auf denen das Modell von Markowitz aufbaut, durchaus umstritten. Seine Voraussetzungen sind erstens, dass für jedes Wertpapier eine erwartete Rendite gegeben ist und die Standardabweichung dieser Rendite bekannt ist. Zweitens dient in seinem Modell die Standardabweichung der Rendite als Risikokennzahl. Diese Annahmen werden jedoch in der Praxis hinterfragt. Zum Einen ist unklar, wie die erwartete Rendite eines Wertpapiers geschätzt werden soll, zum anderen umfassen Standardabweichungen auch vorteilhafte Schwankungen und damit dient die Standardabweichung nicht unbedingt als Risikomaß. Für beide Annahmen werden in der vorliegenden Arbeit Alternativen angeboten.

Zur Definition geeigneter Risikomaße gibt es den Begriff des *kohärenten* Risikomaßes, der durch die Arbeit von Artzner, Delbaen, Eber und Heath in [2] etabliert wurde. Diese Definition wird in Abschnitt 3 erläutert und als konkretes Beispiel für ein kohärentes Risikomaß wird der Expected Shortfall und dessen Berechnung vorgestellt. Auf dieser Basis erfolgt im weiteren Verlauf die Risikomessung in dieser Arbeit.

Bei der Schätzung zukünftiger Renditen eines Wertpapiers kommt dann natürlich die Technische Analyse ins Spiel. Eines der grundlegenden Prinzipien der Technischen Analyse lautet „The trend is your friend“. In dem Abschnitt 4 werden getreu nach dem genannten Motto zwei recht einfache Verfahren vorgestellt: Die Verwendung der Rate-of-Change bzw. die Verwendung einer linearen Regression. Der Vorteil der gewählten Ansätze ist, dass sie leicht einen Backtest ermöglichen. Gleichwohl sind natürlich auch komplexere Verfahren zur Schätzung der Rendite eines Wertpapiers denkbar.

Mit einer kohärenten und damit besseren Risikomessung sowie einer erfolgreichen Schätzung zukünftiger Renditen unter Verwendung der Technischen Analyse kann dann die in Abschnitt 2 vorgestellte Moderne Portfoliotheorie überarbeitet werden. In Abschnitt 5 wird ein neues *Marktportfolio* bestimmt, das auf einem *kohärenten* Risikomaß beruht und das daher *kohärentes Marktportfolio* genannt wird.

Der praktische Nutzen dieser theoretischen Abhandlungen wird in Abschnitt 6 unter Beweis gestellt. Es wird eine Handelsstrategie auf Basis des kohärenten Marktportfolios vorgestellt und sowohl auf dem Europäischen als auch auf dem Amerikanischen Aktienmarkt einem Backtest unterzogen. Eine kurze Zusammenfassung in Abschnitt 7 rundet die Arbeit ab.

2 Das Marktportfolio der Modernen Portfoliotheorie

2.1 Die Effizienzgrenze ohne Portfolio-Beschränkungen

Es wird angenommen, dass es N Wertpapiere gibt. Dabei besitzt jedes Wertpapier eine erwartete Rendite r_i ; diese ist allerdings unsicher und die Standardabweichung dieser Rendite wird mit σ_i quantifiziert. Die Wertpapier-Renditen sind miteinander korreliert und die Kovarianz-Matrix der Renditen lautet \mathbf{C} , es gilt also $C_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ wobei ρ_{ij} die Korrelation zwischen der Rendite des Wertpapiers i und des Wertpapiers j bezeichnet. Die Matrix \mathbf{C} ist offensichtlich symmetrisch und es wird unterstellt, dass sie invertierbar ist - jedes Wertpapier trägt demnach ein gewisses idiosynkratisches Risiko, das sich nicht mit Linearkombinationen anderer Wertpapiere eliminieren läßt. In diesem Modell gibt es also keine deterministische¹ Anlage.

Die Zusammensetzung eines Portfolios wird mit Gewichten w_i beschrieben und w_i bezeichnet den Anteil des

¹Gemeinhin wird bei einer Geldanlage mit einem im Voraus feststehendem Ertrag von einer „sicheren“ Geldanlage gesprochen. Diese Begrifflichkeit ist passend bei der Verwendung der Standardabweichung als Risikomaß. Da im weiteren Verlauf andere Risikomaße betrachtet werden, wird in dieser Arbeit anstelle von einer „sicheren“ Geldanlage von einer „deterministischen“ Geldanlage gesprochen.

i -ten Wertpapiers im Portfolio. Damit ergibt sich die Nebenbedingung²

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 = \mathbf{1}^T \mathbf{w} \quad (1)$$

Die erwartete Rendite R eines solchen Portfolios ist gegeben mit

$$R = \sum_{i=1}^N w_i r_i = \mathbf{r}^T \mathbf{w} \quad (2)$$

und die Varianz V der Rendite dieses Portfolios ist gegeben mit

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{C}_{ij} w_i w_j = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad (3)$$

Die Standardabweichung der Portfolio-Rendite ist durch \sqrt{V} gegeben und wird als das Risiko des Portfolios interpretiert.

In diesem Umfeld wird nach der Zusammensetzung eines möglichst risikoarmen Portfolios gesucht, das eine bestimmte erwartete Rendite R besitzt. Dieses ist aus mathematischer Sicht das Problem der Minimierung von \sqrt{V} unter den Nebenbedingungen (1) und (2). Anstelle der Minimierung von \sqrt{V} wird nachfolgend der Ausdruck $\frac{1}{2}V$ minimiert, was offensichtlich äquivalente ist. Zur Lösung dieses Problems wird die Methode der Lagrange-Multiplier verwendet. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} + \lambda (R - \mathbf{r}^T \mathbf{w}) + \mu (1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w}) \quad (4)$$

und die notwendige Bedingung für die Lösung besteht darin, dass alle partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion 0 sind:

$$\mathbf{0} = \mathbf{C} \mathbf{w} - \lambda \mathbf{r} - \mu \mathbf{1} \quad (5)$$

$$0 = R - \mathbf{r}^T \mathbf{w} \quad (6)$$

$$0 = 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w} \quad (7)$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen kann unmittelbar die Portfolio-Zusammensetzung in Abhängigkeit der beiden Lagrange-Multiplikatoren ausgedrückt werden:

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r} + \mu \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1} \quad (8)$$

Zur Bestimmung der Werte der Lagrange-Multiplikatoren wird diese Lösung für \mathbf{w} in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt und es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für λ und μ :

$$\lambda \mathbf{r}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r} + \mu \mathbf{r}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1} = R \quad (9)$$

$$\lambda \mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r} + \mu \mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1} = 1 \quad (10)$$

Unter Beachtung, dass \mathbf{C}^{-1} symmetrisch ist und der Verwendung der Hilfsgrößen $a = \mathbf{r}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}$, $b = \mathbf{r}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1}$ und $d = \mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1}$ ergibt sich die Lösung für die beiden Lagrange-Multiplikatoren gemäß:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{a d - b^2} \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Mit der Kenntnis von λ und μ ist dann auch die Zusammensetzung des Varianz-Minimierenden Portfolios zur erwarteten Rendite R aufgrund von Gleichung (8) bekannt. Die minimale Varianz dieses Portfolios zur Rendite R ist kann nun ebenfalls leicht bestimmt werden und als Funktion der zu erwartenden Zielrendite ausgedrückt werden:

$$V(R) = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} = a \lambda^2(R) + 2b \lambda(R) \mu(R) + d \mu^2(R) \quad (12)$$

Da $\lambda(R)$ und $\mu(R)$ linear in R sind, ist die minimale Varianz $V(R)$ eine Parabel in R .

²Im Folgenden werden skalare Größen in normaler Schriftart, Vektoren und Matrizen in Fettdruck angegeben.

Beispiel

Zur Illustration der vorstehenden Berechnung wird in diesem Beispiel ein Universum von 4 Aktien angenommen. Ferner wird unterstellt, dass diese Aktien paarweise zu 60% miteinander korreliert sind.

Wertpapier	erwartete Rendite	Varianz der Rendite	Standardabweichung
Aktie 1	4%	15%	0,3872
Aktie 2	5%	20%	0,4472
Aktie 3	3%	20%	0,4472
Aktie 4	6%	30%	0,5477

Werden die vorgestellten Berechnungen für diesen Fall vorgenommen, so ergibt sich damit ein Teil der Abbildung 1. Die roten Punkte repräsentieren die einzelnen Aktien aus diesem Beispiel. Die schwarze Kurve gibt den Verlauf von $\sqrt{V(R)}$ wieder, also das minimale Risiko zum Erzielen einer vorgegebenen Rendite R . Diese Kurve verläuft links von den Einzelaktien, was die Aussage unterstreicht, dass durch Diversifikation das Risiko gegenüber einer Einzelanlage reduziert werden kann. Der obere Ast der schwarzen Kurve wird „Effizienzlinie“ genannt, da auf dieser Linie die effizienten Portfolios liegen, d.h. die Portfolios mit der maximalen Rendite bei vorgegebenem Risiko. Ein Investor wird unter Berücksichtigung seiner persönlichen Risikoneigung nun in ein Portfolio investieren, das auf der Effizienzlinie liegt.

2.2 Das Modell bei einem Verbot von Leerverkäufen

In der vorstehenden Analyse gab es keine Einschränkung von Leerverkäufen. Wird wie in [7] angenommen, dass Leerverkäufe verboten sind, so wird die Menge der erreichbaren Portfolios durch die Bedingung $w_i \geq 0$ eingeschränkt. Mit dieser Einschränkung ist dann eine allgemeine Herleitung wie im Abschnitt 2.1 dargestellt nicht mehr möglich; im Allgemeinen wird hier eine numerische Suche benötigt, um die Effizienzlinie unter dieser Einschränkung zu finden. Zur Darstellung in dieser Arbeit werden die verschiedenen Risiko-Rendite-Profile von Portfolios ohne Leerverkaufsposition mit blauen Punkten gezeigt. Dabei wird auf genau das zuvor gezeigte Beispiel abgestellt. Es wird aus der Abbildung 1 deutlich, dass für eine Rendite von knapp unter 6% nun deutlich höhere Risiken eingegangen werden müssen und Renditen größer als 6% können in diesem Beispiel nicht erwartet werden.

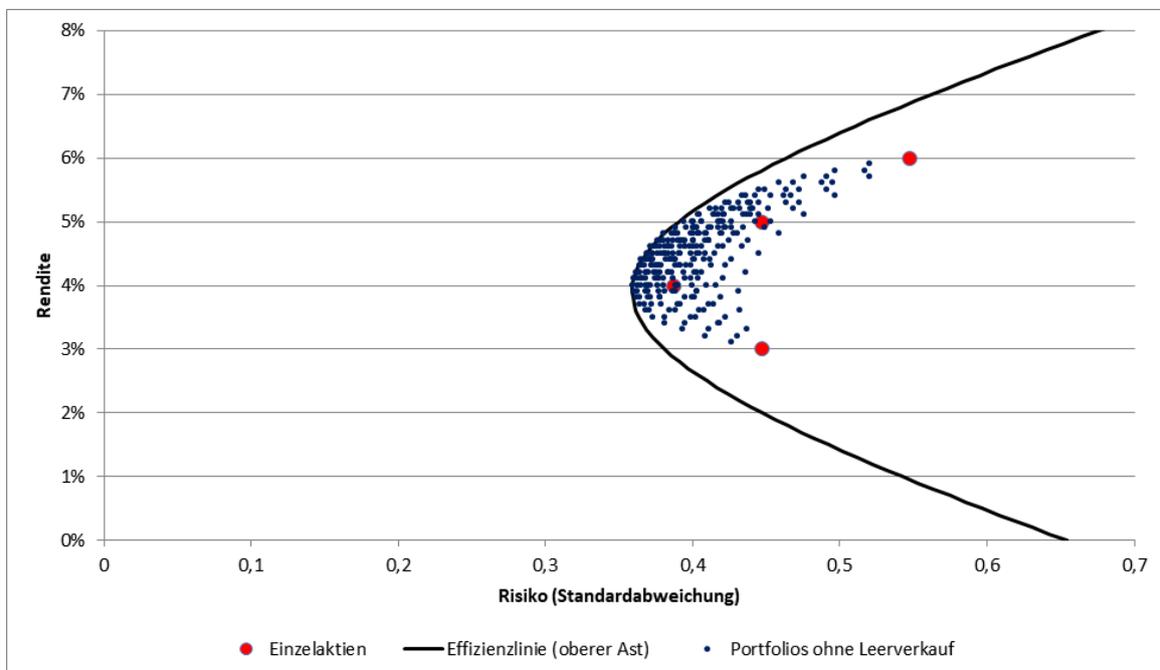


Abbildung 1: Die Einzelaktien, die Effizienzlinie ohne Restriktionen und Portfolios mit Leerverkaufsverbot

2.3 Einführung einer deterministischen Anlage: Das Sharpe-Ratio und das Marktportfolio

William Sharpe erweiterte das Universum an Investitionsmöglichkeiten in [9] um eine eine Anlage auf einem Tagesgeld/Festgeld-Konto. Die Einführung der deterministischen Anlage hat eine wichtige Konsequenz, die mithilfe der Abbildung 2 erläutert wird. Aus den risikobehafteten Wertpapieren kann entsprechend der bisherigen Ergebnisse zu jeder erwarteten Rendite ein Portfolio mit minimalem Risiko (Standardabweichung) zusammengestellt werden. Diese Begrenzung der möglichen Portfolios wird im Risiko-Rendite-Diagramm mit einer schwarzen Linie gezeigt. Ferner gibt es nun eine risikofreie Anlage, die einen bestimmten sicheren Ertrag verspricht. Diese ist in der Abbildung mit einem grünen Punkt markiert und befindet sich annahmegemäß exakt auf der Rendite-Achse.

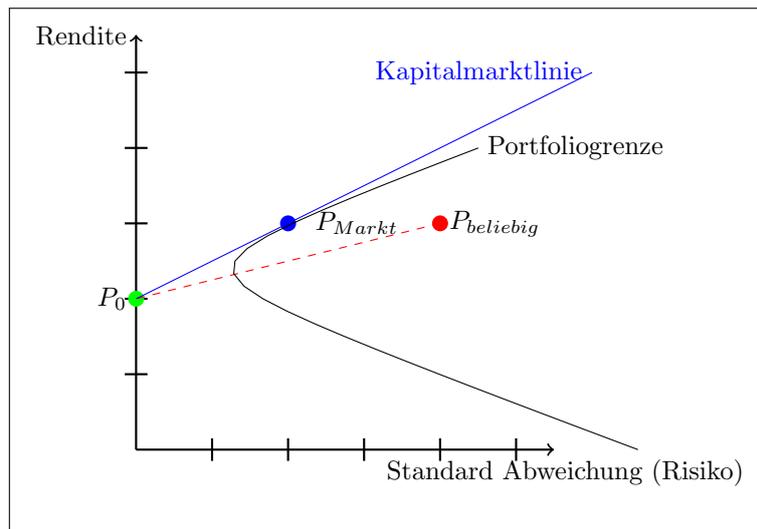


Abbildung 2: Portfolio-Auswahl unter Existenz einer risikofreien Anlage und die Maximierung des Sharpe-Ratios

Betrachten wir ein beliebiges Portfolio $P_{beliebig}$, das in diesem Diagramm rot dargestellt ist. Ein Investor könnte sein Geld zwischen diesem roten Portfolio und der deterministischen Anlage aufteilen: Er investiert einen Anteil $\omega \in [0, 1]$ in dem Portfolio $P_{beliebig}$ und den restlichen Anteil $(1 - \omega)$ in die deterministischen Anlage P_0 , die eine Rendite r_0 abwirft. Dann gilt:

$$\text{erwartete Rendite } (\omega P_{beliebig} + (1 - \omega)P_0) = \omega r_{beliebig} + (1 - \omega) r_0 = r_0 + \omega (r_{beliebig} - r_0) \quad (13)$$

$$\text{Standardabweichung } (\omega P_{beliebig} + (1 - \omega)P_0) = \omega \sigma_{beliebig} \quad (14)$$

Dabei bezeichnet $r_{beliebig}$ die erwartete Rendite und $\sigma_{beliebig}$ die Standardabweichung der Rendite des Portfolios $P_{beliebig}$. Es ist offensichtlich, dass die so gemischten Portfolios auf der rot gestrichelten Verbindungslinie liegen. Die Steigung dieser Verbindungslinie ist dabei gegeben durch

$$S_{beliebig} = \frac{r_{beliebig} - r_0}{\sigma_{beliebig}} \quad (15)$$

Diese Steigung wird auch das Sharpe Ratio des Portfolios $P_{beliebig}$ genannt. Offensichtlich ist die Wahl eines Portfolios, dass auf einer Mischung von $P_{beliebig}$ mit der deterministischen Anlage besteht, für keine vorgegebene Risikotoleranz optimal, da die rote Linie unterhalb der blauen Linie verläuft, die eine Mischung aus der deterministischen Anlage und einem Portfolio P_{Markt} repräsentiert. Das Portfolio P_{Markt} ist das Portfolio, das unter allen möglichen Portfolios das größte Sharpe-Ratio besitzt. Auch wenn jeder Investor eine eigene Rendite-Risiko-Präferenz besitzt, so wird er immer eine Mischung aus dem sogenannten Marktportfolio P_{Markt} und der deterministischen Anlage bevorzugen, wie die Abbildung 2 zeigt. Denn die blau dargestellte Kapitalmarktlinie, die diese Mischungen repräsentiert, liegt oberhalb aller anderen Portfolios und verspricht damit bei gleichem Risiko eine höhere Rendite. Das Marktportfolio P_{Markt} wird auch als „Tangential-Portfolio“ bezeichnet, da die Kapitalmarktlinie an diesem Punkt die Portfoliogrenze berührt.

Damit hat das *Marktportfolio* P_{Markt} eine besondere Bedeutung in der Modernen Portfoliotheorie und ist unabhängig von der Risikopräferenz eines Investors. Ein Investor muss sich für seine persönliche Anlageentscheidung dann nur noch anhand seiner Risikopräferenz über die Gewichtung zwischen der deterministischen Anlage und dem Marktportfolio im Klaren werden.

3 Kohärente Risikomaße

In Abschnitt 2 wurde die moderne Portfoliotheorie vorgestellt, die auf der Standardabweichung als Risikomaß beruht. Wie schon in der Einleitung dargestellt, ist diese Methodik zur Risikomessung umstritten. In diesem Abschnitt werden mathematische Betrachtungen zu Risikomaßen vorgestellt. Die wesentliche Inspiration dazu basiert auf der Arbeit von Artzner, Delbaen, Eber und Heath, die in [2] den Begriff eines kohärenten Risikomaßes geprägt haben. Der axiomatische Ansatz dieser Autoren führt dann auch zu einem konkreten Risikomaß, dem „Expected Shortfall“, für das auch eine praktische Methodik zur Berechnung vorgestellt wird. Vor dem Hintergrund, dass in der Portfoliotheorie die deterministische Geldanlage eine besondere Bedeutung zukommt, wird zum Abschluss die Risikomessung unter Verwendung einer Benchmark betrachtet.

3.1 Die Definition kohärenter Risikomaße

Eine allgemeine sprachliche Definition von Risiko könnte orientiert an [4] folgendermaßen lauten:

Risiko besteht in der Möglichkeit, aufgrund einer Handlung oder Unterlassung einen Nachteil zu erleiden.

Im Bereich des Finanzwesens, ist der „Nachteil“ ein finanzieller Verlust und die Handlung die Zusammensetzung eines Portfolios. Ferner ist das Wesen des Risikos durch Unsicherheit geprägt - ein sicherer Verlust stellt demnach kein Risiko mehr dar! Für die Modellierung der Unsicherheit ist daher ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nötig, der beispielsweise alle möglichen, zukünftigen Aktienkurse beschreibt. Für den Gewinn oder Verlust eines Investors ist dann natürlich sein Portfolio ausschlaggebend und \mathcal{L} bezeichnet die Menge aller Verlustfunktionen, also die Menge aller Abbildungen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $L \in \mathcal{L}$ gibt also den Verlust (im Fall eines negativen Wertes Gewinn) an, den ein Portfolio in einem bestimmten Szenario annimmt. Die Vorschrift, wie das Risiko für eine Verlustfunktion eines Portfolios zu bestimmen ist, wird nachfolgend mit ρ bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen erfolgt nun gemäß [2] die

Definition 1 (kohärentes Risikomaß) Eine Abbildung $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt kohärentes Risikomaß genau dann, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positive Homogenität Für alle $\lambda \geq 0$ und $L \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L) \quad (16)$$

2. Monotonie Für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ mit $L_1 \leq L_2$ gilt:

$$\rho(L_1) \leq \rho(L_2) \quad (17)$$

3. Subadditivität Für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2) \quad (18)$$

4. Translationsinvarianz ³ Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\rho(L + \lambda) = \rho(L) + \lambda \quad (19)$$

Anmerkung Dass ρ gemäß dieser Definition auch den Wert $+\infty$ annehmen darf, ist ausschließlich dem Umstand geschuldet, dass zu Gunsten einer einfacheren Darstellung auf Integrierbarkeitsbedingungen an \mathcal{L} verzichtet wurde.

Für ein kohärentes Risikomaß sollen also vier Regeln gelten, die ganz praktisch zu interpretieren sind:

- Die positive Homogenität besagt, dass beispielsweise ein doppelt so großes Portfolio ($\lambda = 2$), also ein Portfolio in dem alle Positionen verdoppelt worden sind, ein doppelt so großes Risiko trägt. Damit ist auch klar, dass das Risiko nicht als relative Veränderung (beispielsweise in %) gemessen wird, sondern eine absolute Größe in einer Währung (z.B. EUR) bezeichnet.
- Ist der Verlust des Portfolios L_1 immer kleiner oder gleich dem Verlust des Portfolios L_2 , so ist auch das Risiko des Portfolios L_1 geringer oder gleich gegenüber dem Portfolios L_2 .

³Der Begriff „Translations-invariant“ ist sprachlich nicht strigend zu verstehen, da die Translation ja auf der rechten Seite der Formel doch einen Effekt hat. Insofern wäre „Translations-konform“ zutreffender. Allerdings hat sich der irreführende Terminus aus [2] im Zusammenhang mit kohärenten Risikomaßen durchgesetzt.

- Die Subadditivität ist die mathematische Formulierung der klassischen Diversifikation: Das Gesamtrisiko, dass sich aus zwei Portfolios zusammensetzt, ist geringer als (oder gleich) der Summe der Risiken der beiden einzelnen Portfolios.
- Die letzte Regel besagt, dass ein zusätzlicher, deterministischer Zu- oder Abfluß von Kapital das Risiko ändert: Gibt es einen zusätzlichen Abfluß ($\lambda > 0$), so erhöht dieser das Risiko in dessen Höhe; Ein zusätzlicher Ertrag ($\lambda < 0$) mindert das Risiko entsprechend.

3.2 Eigenschaften bekannter Risikomaße

Für die Beweise der in diesem Abschnitt aufgestellten Lemmata wird der mathematisch interessierte Leser auf Anhang A verwiesen.

3.2.1 Standardabweichung

In der Modernen Portfoliotheorie dient die Standardabweichung als Risikomaß. Diese wird in Hinblick auf die vier Axiome für ein kohärentes Risikomaß betrachtet. Es ist nicht verwunderlich, dass dieses Risikomaß die Subadditivität erfüllt - ansonsten hätte es ja keinen Diversifikationseffekt in der Portfoliotheorie gegeben. Allerdings ist die Standardabweichung kein kohärentes Risikomaß und damit ist dann auch die Kritik in der Verwendung der Standardabweichung als Risikomaß berechtigt.

Lemma 1 *Die Standardabweichung ist kein kohärentes Risikomaß. Sie erfüllt zwar die Axiome Positive Homogenität und Subadditivität, aber die Standardabweichung ist weder monoton noch translationsinvariant.*

3.2.2 Value at Risk

Das bekannteste und bis heute den Marktstandard prägende und in der Bankenaufsicht eingesetzte Risikomaß ist der „Value at Risk“ (VaR), der ein Quantil der Verlustfunktion zum Perzentil α darstellt. Dabei sind typische Werte für α 95% oder 99%. Der Value at Risk zum Quantil 99% gibt an, dass in 99% aller Fälle der Verlust nicht größer als der VaR ist. Es gibt jedoch zwei Kritikpunkte am VaR: Zum einen sagt er nichts darüber aus, wie hoch die Verluste werden, wenn sie den VaR übersteigen. Zum anderen erfüllt der Value at Risk nicht die Bedingung der Subadditivität (siehe Lemma 2) und erschwert damit die Einrichtung eines Limitsystems: Die Begrenzung des VaR auf Einzelportfolios stellt nicht sicher, dass der VaR des Gesamtportfolios durch die Summe der VaR der Einzelportfolios beschränkt ist.

Definition 2 (Value at Risk) Sei $L \in \mathcal{L}$ und $\alpha \in]0, 1[$.

$$\text{VaR}_\alpha(L) := \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}[L \leq x] \geq \alpha\} \quad (20)$$

Lemma 2 *Der Value at Risk erfüllt die drei Axiome Positive Homogenität, Monotonie und Translationsinvarianz. Es ist jedoch nicht subadditiv und damit kein kohärentes Risikomaß.*

3.2.3 Expected Shortfall

Ein weiteres Risikomaß ist der „Expected Shortfall“. Dieses betrachtet gerade die schlimmsten $1 - \alpha$ Fälle und das ausgewiesene Risiko ist der zu erwartende Verlust unter diesen Szenarien:

Definition 3 (Expected Shortfall) Sei $L \in \mathcal{L}$ und $\alpha \in]0, 1[$.

$$\text{ES}_\alpha(L) := \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_p(L) \, dp \quad (21)$$

Lemma 3 *Eine alternative Formulierung des Expected Shortfall ist gegeben durch*

$$\text{ES}_\alpha(L) = \text{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E} \left[(L - \text{VaR}_\alpha(L))^+ \right] \quad (22)$$

Dabei bezeichnet \mathbb{E} den Erwartungswert zum Maß \mathbb{P} und $(x)^+$ den Positivteil von x , d.h. $(x)^+ := \max(0, x)$.

Lemma 4 *Der Expected Shortfall ist ein kohärentes Risikomaß.*

Die praktische Berechnung des Expected Shortfalls wird im nächsten Abschnitt erläutert. Die Wahl als kohärentes Risikomaß für diese Arbeit fiel auf den Expected Shortfall, da dieses Risikomaß sich vermutlich in der Praxis durchsetzen wird, auch wenn heute noch der Value-at-Risk führend ist. Für eine auf längere Sicht breitere Verwendung dieses Risikomaßes spricht, dass der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht der Bank für Internationalen Zahlungsausgleich die Umstellung von Value at Risk auf Expected Shortfall empfiehlt [3].

An dieser Stelle erscheint noch ein Hinweis auf andere Risikomaße angebracht, die mit dem „Expected Shortfall“ zwar verwandt, aber durchaus verschieden sind. Gemeint sind die Risikomaße „Worst Conditional Expectation“ und „Tail Conditional Expectation“, auch „Conditional Value at Risk“ genannt. Die mathematischen Definitionen sind unterschiedlich und ein eindrucksvolles Beispiel, in dem sich diese Risikomaße komplett unterscheiden liefert [1]. Insbesondere ist die „Tail Conditional Expectation“ (und damit der „Conditional Value at Risk“) nicht kohärent.

3.3 Die Berechnung des Expected Shortfall zum 95% -Quantil und Risikohorizont von einer Woche

Der Expected Shortfall als kohärentes Risikomaß ist nun theoretisch vorgestellt worden und nun wird die Methodik zur praktische Berechnung vorgestellt. Als Grundlage dazu soll eine historische Simulation dienen, die unterstellt, dass sich die Wertpapiere über eine bestimmte Periode in der Vergangenheit gleich verhalten. Zur Vereinfachung wird dabei die Risikomessung für ein Portfolio aus Aktien oder Fonds betrachtet, d.h. ein Portfolio von Wertpapieren ohne Fälligkeit. Bei Wertpapieren mit einer expliziten Fälligkeit ändert sich deren Verhalten mit der Zeit und es darf kein gleichartiges Verhalten über einen gewissen historischen Zeitraum unterstellt werden. Derartige Wertpapiere erfordern daher eine komplexere Betrachtung und werden im Folgenden nicht betrachtet.

Im institutionellen Risikomanagement basiert die historische Simulation auf Zeitreihen mit täglichen Daten - was allerdings mit einem besonderen Aufwand für die Erstellung der Zeitreihen einhergeht, da beispielsweise die unterschiedlichen Feiertage in den verschiedenen Ländern oder auch die Zeitverschiebung zwischen verschiedenen Börsenplätzen beachtet werden muss. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird hier eine historische Simulation auf Wochenschlußkursen vorgestellt. Für alle Aktien werden die letzten 51 Wochenschlußkurse betrachtet, das entspricht einer Historie von knapp einem Jahr. Für die i -te Aktie bezeichnet A_j^i den Wochenschlußkurs vor j Wochen ($j = 1$ letzter Wochenschlußkurs, $j = 2$ den Wochenschlußkurs davor, u.s.w.). Da für die Aktien die die relativen Änderungen relevant sind, werden die Änderungen auf einer logarithmischen Skala betrachtet:

$$\delta_j^i := \ln A_j^i - \ln A_{j+1}^i = \ln \frac{A_j^i}{A_{j+1}^i} \quad j = 1 \dots 50 \quad (23)$$

Die in (23) verwendete Definition für relative Szenarien ist üblich, mit der bekannten Näherung $\ln(1+x) \approx x$ kann leicht gezeigt werden, dass damit die klassische Definition der relativen Änderung approximiert wird:

$$\ln \frac{A_j^i}{A_{j+1}^i} = \ln \frac{A_{j+1}^i + A_j^i - A_{j+1}^i}{A_{j+1}^i} = \ln \left(1 + \frac{A_j^i - A_{j+1}^i}{A_{j+1}^i} \right) \approx \frac{A_j^i - A_{j+1}^i}{A_{j+1}^i} \quad (24)$$

Damit sind zunächst 50 Szenarien definiert, die die simultanen, relativen Änderungen der Aktien beschreiben. Für eine Statistik ist diese Anzahl von Szenarien zu gering, daher werden zusätzlich gespiegelte Szenarien konstruiert⁴:

$$\delta_{50+j}^i := \ln A_{j+1}^i - \ln A_j^i = -\delta_j^i \quad j = 1 \dots 50 \quad (25)$$

Die Verwendung von gespiegelten Szenarien ist durchaus üblich und in der Praxis bekannt [6]; eine ausführliche Studie [10] belegt ferner, dass die historische Simulation mit gespiegelten Szenarien auch für die Bestimmung des Expected Shortfalls bessere Ergebnisse liefert. Neben der erhöhten Anzahl von Szenarien hat dieses Vorgehen den Vorteil, dass es gleich viele positive wie negative Szenarien gibt und damit ist bei einem Quantil von $\alpha \geq 50\%$ sichergestellt, dass der Expected Shortfall einer Aktie nicht negativ wird.

Auf Basis dieser nun insgesamt 100 Szenarien für die Wertpapiere wird nun die Auswertung der Verlustfunktion vorgenommen. Enthält das Portfolio insgesamt N Positionen mit n_i Aktien der i -ten Aktie mit $i = 1 \dots N$ und

⁴Hier zeigt sich der Vorteil der logarithmischen Skalierung: Bei der klassischen Definition der relativen Änderung wäre der Umstand zu berücksichtigen, dass eine Aktie, die von 100 EUR auf 80 EUR fällt sich um -20% ändert, die Gegenbewegung von 80 EUR auf 100 EUR entspricht aber $+25\%$, nicht nur das Vorzeichen, sondern auch der Betrag der Zahl ändert sich. Bei der logarithmischen Vorgehensweise ändert sich nur das Vorzeichen.

bezeichnet A_0^i den aktuellen Wert der Aktie, so gilt:

$$L_j := \sum_{i=1}^N n_i A_0^i (1 - \exp(\delta_j^i)) \quad j = 1 \dots 100 \quad (26)$$

Die Werte von L_j werden nun aufsteigend sortiert, diese Umsortierung wird mit \tilde{L} bezeichnet und damit gilt dann

$$j \leq k \quad \implies \quad \tilde{L}_j \leq \tilde{L}_k \quad (27)$$

Der Expected Shortfall ergibt sich als Erwartungswert jenseits einer Konfidenz α . In unserem Fall sei $\alpha = 95\%$ und bei insgesamt 100 Szenarien sind also 5 Szenarien außerhalb der gewählten Konfidenz. Im allgemeinen wird der Erwartungswert über die k -größten Werte bestimmt. Dabei ist $k = (1 - \alpha)S$ und S bezeichnet die Anzahl der Szenarien:

$$ES_\alpha = \frac{1}{k} \sum_{j=S-k+1}^S \tilde{L}_j \quad \text{mit } k = (1 - \alpha)S \quad (28)$$

3.4 Die Risikoberechnung unter Verwendung einer Benchmark

Die vorgestellte Risikomessung über den Expected Shortfall kann nicht nur als nominales Risiko betrachtet werden, wie in Abschnitt 3.3, sondern auch als Risiko gegenüber einer Benchmark. Dann wird die Verlustfunktion durch die Abweichung von der Benchmark berechnet. In dem ersten Fall wird ein Index als Benchmark verwendet und die kohärente Risikomessung ist eine Alternative zum klassischen Tracking-Error, der typischerweise einer Standardabweichung entspricht. Im zweiten Fall wird die deterministische Anlage als Sonderfall einer Benchmark betrachtet.

3.4.1 Ein Index als Benchmark

Für die Bestimmung des Risikos gegenüber einem Aktienindex werden neben den historischen Szenarien der Aktien δ_j^i auch die historischen Szenarien der Benchmark benötigt. Diese werden analog zu den Szenarien der Aktien bestimmt; dabei bezeichnet B_j den Wochenschlusskurs des Index vor j Wochen:

$$\delta_j^B := \ln(B_j) - \ln(B_{j+1}) \quad j = 1 \dots 50 \quad (29)$$

$$\delta_{50+j}^B := -\delta_j^B \quad j = 1 \dots 50 \quad (30)$$

$$(31)$$

Für ein Portfolio, das sich aus N Positionen zusammensetzt und jeweils n_i Aktien der i -ten Aktie beinhaltet, ergibt sich der aktuelle Portfolio-Wert mit $\sum_{i=1}^N n_i A_0^i$. Die Verlustfunktion in den Szenarien beschreibt Unterentwicklung des Portfolios gegenüber der Benchmark und berechnet sich wie folgt:

$$L_j := \left(\sum_{i=1}^N n_i A_0^i \right) \exp(\delta_j^B) - \sum_{i=1}^N n_i A_0^i \exp(\delta_j^i) \quad j = 1 \dots 100 \quad (32)$$

$$= \sum_{i=1}^N n_i A_0^i (\exp(\delta_j^B) - \exp(\delta_j^i)) \quad (33)$$

Für den Fall, dass die Benchmark ein reiner Nominalwert ist, gilt $\delta_j^B = 0$ und diese Formel entspricht dann wieder der Gleichung (26).

3.4.2 Die deterministische Anlage als Benchmark

Ist die Benchmark die risikofreie Anlage, so gibt handelt es sich dabei um eine Anlage mit einem deterministischem Auszahlungsprofil und es gibt daher keinen Anlaß, die Verteilung dieser Anlage zu schätzen. Dementsprechend ist nur der aktuelle risikofreie Zinssatz r_0 und der zeitliche Horizont der Risikomessung τ relevant, der hier immer eine Woche beträgt. Daher gilt:

$$\delta_j^B := \ln(1 + r_0\tau) - \ln(1) = \ln(1 + r_0\tau) \approx r_0\tau \quad j = 1 \dots 100 \quad (34)$$

$$(35)$$

Dieser Wert für δ_j^B ändert sich damit auch bei Spiegelungen nicht - der Effekt der aktuellen risikofreien Anlage steht ja unmittelbar fest. Ein Depot, das nur aus der risikofreien Anlage besteht, hat in der nominalen Sicht einen Expected Shortfall in Höhe von

$$ES_\alpha(\text{risikofreie Anlage}) = -r_0\tau \quad (36)$$

Das ergibt sich unabhängig von der vorstehenden Berechnung auch aus der Translationsinvarianz. Wird diese Risikoberechnung gegenüber der deterministischen Geldanlage über einen Zeitraum, der dem Risikohorizont entspricht, durchgeführt, so beträgt der Expected Shortfall dann offensichtlich 0. So ein Portfolio weist schliesslich immer genau die Wertänderung der Benchmark und ist in dieser Interpretation damit „risikolos“. Diese Betrachtung gilt unabhängig vom Vorzeichen von r_0 und damit insbesondere auch für Negativzinsen.

4 Die trendfolgende Rendite-Schätzung

In der Einleitung wurde auf zwei Kritikpunkte an der Modernen Portfoliotheorie hingewiesen. Neben der Risikomessung auf Basis der Varianz wurde bei der Entwicklung der Portfoliotheorie angenommen, dass die Rendite der Wertpapiere geschätzt werden kann. Allerdings wurde dieser Aspekt nicht weiter untersucht. An dieser Stelle kommt nun die Technische Analyse ins Spiel, und das vielleicht wesentlichste Prinzip der Technischen Analyse besagt:

The trend is your friend!

Dementsprechend dient in dieser Arbeit die Idee, für die Prognose zukünftiger Renditen eines Wertpapiers dessen historischen Rendite fortzuschreiben. Das ist sicherlich die einfachste Variante, und im Rahmen der vielfältigen Analyse-Werkzeuge der Technischen Analyse gibt es auch noch bessere Verfahren, aber die einfache Trendfortschreibung ist einerseits schon ausreichend, um den Markt zu schlagen wie der Backtest in Abschnitt 6 zeigen wird. Andererseits erlaubt ein so ein einfaches Verfahren auch die leichte Umsetzung der Strategie in einen Backtest.

Zwei Varianten für diesen einfachen, trendfolgenden Ansatz werden nachfolgend vorgestellt.

4.1 Schätzung auf Basis Rate-of-Change

Die Rate-of-Change (RoC) berechnet sich aus den Kursen von zwei Stichtagen: Dem aktuellen Kurs A_0 und dem Kurs A_{-T} vor einem bestimmten Zeitraum T , beispielsweise vor einem Jahr.

$$\text{RoC} := \frac{A_0 - A_{-T}}{A_{-T}} \quad (37)$$

In dieser Arbeit wird grundsätzlich der Zeitraum von einem Jahr für die Renditeschätzung verwendet, daher ist dann die RoC auch die erwartete annualisierte Rendite.

4.2 Schätzung mittels linearer Regression

Die vorstehende Renditeschätzung basiert nur auf den Kursen von zwei Stichtagen und berücksichtigt den Kursverlauf innerhalb des Jahres ansonsten nicht. Insofern kann die einfache Idee leicht verbessert werden, indem eine lineare Regression auf den Daten eingesetzt wird, um die historische Rendite r der Aktie zu schätzen. Die Basis dafür liegt in dem Ansatz, dass der Kursverlauf der Aktie A_t durch die Funktion $\exp(\lambda + rt)$ angenähert werden soll. Für die praktische Berechnung werden die Kursdaten der Aktie eines bestimmten Zeitraumes (z.B. 1 Jahr) herangezogen, diese werden mit A_{t_i} mit $i = 1 \dots N$ bezeichnet. Zur Bestimmung der Regression für die oben genannte Funktion, wird zunächst für diese Daten nun der Logarithmus berechnet, $X_i := \log(A_{t_i})$ und für die Datenpunkte X_i wird dann der lineare Zusammenhang $\lambda + rt$ unterstellt.

Die Bestimmung des Lageparameters λ für die weitere Analyse nicht relevant und r berechnet sich aus den Daten mit über die nachfolgenden Gleichungen, in denen zunächst die Mittelwerte \bar{t} und \bar{X} bestimmt werden

und mit deren Kenntnis dann die historische Rendite r der Aktie:

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \quad (38)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (39)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} \quad (40)$$

r ist damit die historische Rendite berechnet auf der verwendeten Zeitskala für t_i . Sofern bei der vorstehenden Berechnung t_i nicht in „Jahren“ gemessen wurde, muss die Rendite r noch skaliert werden, um eine annualisierte Rendite zu erhalten.

5 Das kohärente Marktportfolio

5.1 Definition

In Abschnitt 2 wurde das klassische Marktportfolio vorgestellt, das hinsichtlich zweier Aspekte kritisiert wird:

1. Die Verwendung der Varianz als Risikomaß. In Abschnitt 3 wurden der „Expected Shortfall“ als ein kohärentes Risikomaß vorgestellt und begründet, warum ein solches Risikomaß für die Quantifizierung des Risikos eines Portfolios verwendet werden sollte. Damit unter Verwendung einer solchen Risikomessung die deterministische Geldanlage ein Risiko von 0 zugewiesen bekommt, ist die Risikomessung gegenüber der Benchmark der deterministischen Anlage vorzunehmen.
2. In der klassischen Portfoliotheorie wird angenommen, dass die Renditen der Wertpapiere bekannt sind und in der Regel größer als der risikofreie Zins ist. Die Technische Analyse bietet konkrete Verfahren zur Schätzung der Renditen; zwei einfache Ansätze wurden dazu in Abschnitt 4 aufgezeigt. Allerdings können die Renditen der Wertpapiere auch negativ werden; es gibt bekanntlich auch Abwärtstrends.

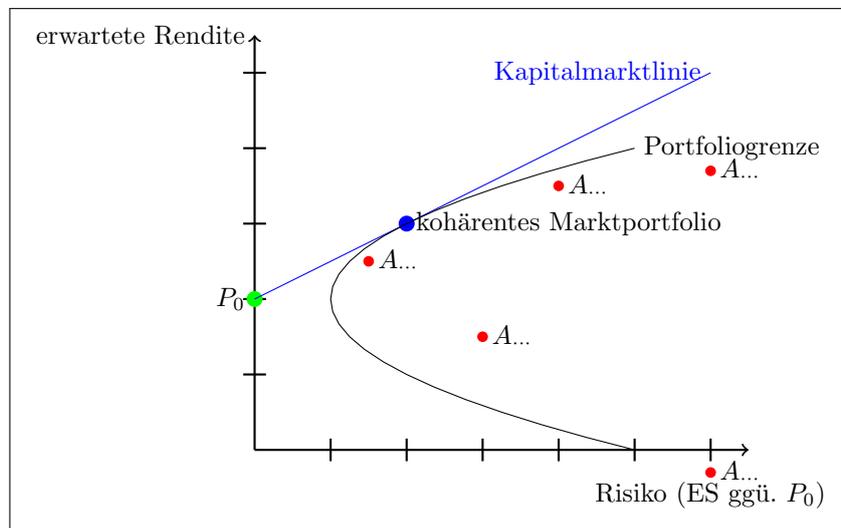


Abbildung 3: Das kohärente Marktportfolio

Werden diese beiden Anpassungen auf die klassische Definition des Marktportfolios übertragen, so ergibt sich auf den ersten Blick ein sehr ähnliches Bild zu Abbildung 2. Auch in dieser Betrachtung ist die Kapitalmarktlinie eine Gerade, da bei einer Mischung zwischen der deterministischen Anlage P_0 mit Rendite r_0 und einem beliebigen Portfolio $P_{bel.}$ analog zu (13) und (14) ein in dem Mischungsverhältnis ω linearer Zusammenhang gilt:

$$\text{erwarteteRendite}(\omega P_{bel.} + (1 - \omega)P_0) = \omega r_{bel.} + (1 - \omega)r_0 = r_0 + \omega(r_{bel.} - r_0) \quad (41)$$

$$\text{ES}(\omega P_{bel.} + (1 - \omega)P_0) = \text{ES}(\omega P_{bel.}) = \omega \text{ES}(P_{bel.}) \quad (42)$$

Dabei wurde unterstellt, dass der Expected Shortfall (ES) unter der Benchmark der deterministischen Anlage berechnet wurde. Bei genauerer Betrachtung werden die Unterschiede in diesem Bild 3 gegenüber der Modernen Portfoliotheorie jedoch deutlich:

- Die deterministische Geldanlage P_0 dient nicht nur zur Bestimmung einer risikofreien Rendite r_0 , sondern auch als Benchmark für die Risikomessung. Daher ist das Risiko von P_0 dann auch wieder risikolos wie in der klassischen Portfoliotheorie.
- Die Risikomessung erfolgt mit einem kohärenten Risikomaß, dem Expected Shortfall.
- Für die Bestimmung der erwarteten Renditen der Aktien wird ein explizites Verfahren auf Basis der technischen Analyse verwendet.
- Das kohärente Marktportfolio $P_{\text{kohärent}}$ zeichnet sich dadurch aus, dass es den Quotienten aus erwarteter Überrendite und Risiko maximiert:

$$\frac{\text{Rendite}(P_{\text{kohärent}}) - r_0}{ES(P_{\text{kohärent}})} \geq \frac{\text{Rendite}(P) - r_0}{ES(P)} \quad \text{für alle Portfolios } P \quad (43)$$

- Die Aktien A_1, A_2 können auch negative Renditen aufweisen.

Der letzte Punkt führt gerade bei Ausschluss von Leerverkäufen zu einem weiteren Unterschied zum klassischen Marktportfolio: Sollten keine Aktien Renditen oberhalb des Zinssatzes der deterministischen Geldanlage aufweisen, so ist die Rendite des kohärenten Marktportfolios kleiner als r_0 . Eine Anlage in ein solches Portfolio ergibt jedoch wenig Sinn: Weniger Ertrag aber mehr Risiko als bei der deterministischen Geldanlage! In einem solchen Umfeld, also einem klassischem Bärenmarkt, ist die deterministische Anlage einer Wertpapieranlage vorzuziehen. Das kohärente Marktportfolio existiert dann bei dem Ausschluss von Leerverkäufen nicht mehr.

5.2 Die Eindeutigkeit des kohärenten Marktportfolios

In dem Bild 3 wurde die Effizienzlinie in der üblichen Form der Modernen Portfoliotheorie dargestellt; Vor dem Hintergrund der komplexeren Risikoberechnung ist eine geschlossene Formel für diese Linie nicht mehr gegeben. Von daher stellt sich die Frage⁵, ob die Grafik so noch zutreffend ist und ob das kohärente Marktportfolio wie dargestellt eindeutig ist. Nachfolgend wird gezeigt, dass die Menge der erreichbaren Portfolios weiterhin konvex ist. Da sich das kohärente Marktportfolio als Ergebnis einer linearen Optimierung über der konvexen Menge der erreichbaren Portfolios ergibt, ist es eindeutig.

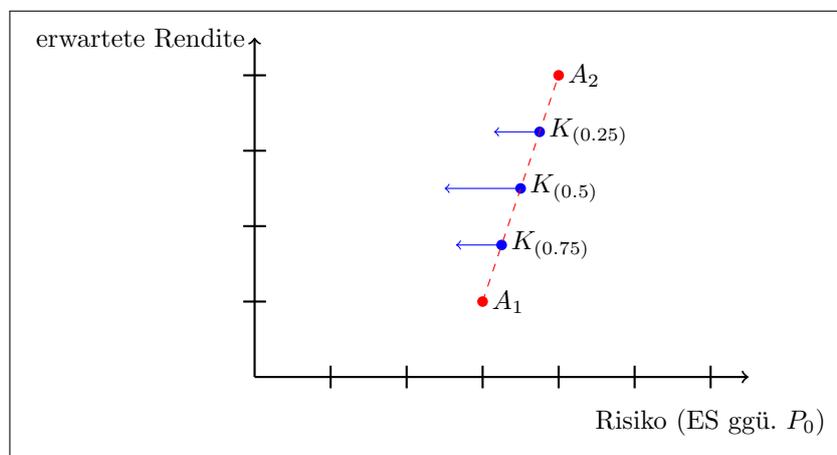


Abbildung 4: Die Menge der erreichbaren Portfolios ist konvex

Dank der Subadditivität des Riskomaßes kann gezeigt werden, dass die Menge der erreichbaren Portfolios weiterhin konvex ist. Liegen zwei Portfolios in der Menge der erreichbaren Portfolios, so kann gezeigt werden, dass auch deren Verbindungslinie komplett innerhalb der Begrenzungslinie liegt. Betrachten wir dazu eine Kombination von zwei Portfolios (oder Aktien), dargestellt durch zwei rote Punkte in der Abbildung 4 (A_1, A_2). Dann ist eine Kombination dieser zwei Portfolios gegeben durch

$$K = \omega A_1 + (1 - \omega) A_2 \quad \text{mit } \omega \in [0, 1] \quad (44)$$

Seien r_1, r_2 die Renditen von A_1 und A_2 . Die Rendite dieses kombinierten Portfolios K ist analog zu Gleichung (41) linear in ω :

$$\text{Rendite}(K) = \omega r_1 + (1 - \omega) r_2 \quad (45)$$

⁵An dieser Stelle danke ich der Jury des VTAD Awards, die diese Frage aufgeworfen hat

Für das Risiko ergibt sich die folgende Ungleichung:

$$\text{ES}(K) = \text{ES}(\omega A_1 + (1 - \omega)A_2) \leq \omega \text{ES}(A_1) + (1 - \omega)\text{ES}(A_2) \quad (46)$$

Damit liegt das Portfolio K entweder direkt auf der Verbindungslinie von A_1 und A_2 (falls die Ungleichung den Gleichheitsfall annimmt) oder links von der Verbindungslinie. Damit liegt dann aber die Verbindungslinie von A_1 und A_2 vollständig innerhalb der Portfoliogrenze und die Menge der erreichbaren Portfolios ist damit konvex.

5.3 Bestimmung des kohärenten Marktportfolios

Eine Bestimmung des kohärenten Marktportfolios ist vor dem Hintergrund einer komplexeren Risikoberechnung nur mit Hilfe numerischer Verfahren möglich; eine geschlossene Formel für die Portfolio-Gewichte oder für die Effizienzlinie wie in Abschnitt 2.1 kann nicht angegeben werden. Bei einem Universum von N Aktien wird ein Portfolio ohne Leerverkauf beschrieben durch die Portfolio-Gewichte $\omega_i \geq 0$ mit $i = 1 \dots N$ und

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \quad (47)$$

Bezeichnet r_i die erwartete Rendite der i -ten Aktie, so ist die erwartete Rendite des Portfolios gegeben durch

$$\text{Rendite} = \sum_{i=1}^N \omega_i r_i \quad (48)$$

Für die Bestimmung des Expected Shortfalls eines solchen Portfolios können die einzelnen Verlust-Szenarien ebenfalls leicht berechnet werden:

$$L_j = \sum_{i=1}^N \omega_i (1 - \exp(\delta_j^i)) \quad (49)$$

Der sich daraus ergebene Expected Shortfall erfordert eine Sortierung der Verluste L_j und ist daher für jede Portfolio-Zusammensetzung ω separat zu bestimmen.

Ein einfaches Vorgehen für einen numerischen Ansatz zur Bestimmung der Portfolio-Gewichte des kohärenten Marktportfolios besteht darin, mit einem beliebigen Portfolio zu starten und dieses dann sukzessive zu variieren. Dazu wird dann eine kleine Gewichtung im Portfolio (z.B. 1%) von der Aktie i weggenommen, sofern sie ein so hohes Gewicht besitzt, und stattdessen das Gewicht der Aktie j erhöht. Das wird für alle Kombinationen von i und j vorgenommen (Maximal $N(N - 1)$ Kombinationen) und für jede dieser Kombination wird das Ratio

$$\frac{\text{Rendite}(\omega) - r_0}{\text{ES}(\omega)} \quad (50)$$

bestimmt. Die Kombination von i und j , die zu dem höchsten Ratio führt, liefert dann die erste Portfolio-Anpassung und dann wird eine solche schrittweise Optimierung des Portfolios wiederholt, bis keine Verbesserung des Ratios mehr möglich ist.

6 Ein auf dem kohärente Marktportfolio basierendes Handelssystem

6.1 Vorstellung des Systems

Zur Abrundung der theoretischen Arbeit wird nun der praktische Nutzen unter Beweis gestellt. Dazu wird ein Aktieninvestment einerseits im Europäischen und andererseits im Amerikanischem Aktienmarkt betrachtet. Da eine Portfolio-Analyse auf allen Aktien des jeweiligen Marktes viel zu komplex ist, wird als Anlageuniversum die ETFs der im jeweiligen Markt gängigen Branchenunterteilung ausgewählt. Als Zinssatz für die deterministische Anlage wird der jeweils gültige Einlagensatz der zuständigen Notenbank herangezogen.

Damit das kohärente Marktportfolio sich auch wirklich aus mehreren Positionen zusammen setzt wird vorausgesetzt, dass mindestens die Hälfte der Sektor-ETFs eine Rendite-Erwartung besitzt, die über dem Notenbank-Zins liegt. Ist das nicht der Fall, so wird die Geldanlage zum Notenbank-Zins vorgenommen. Liegt jedoch eine ausreichend hohe Marktbreite vor, so wird das kohärente Marktportfolio bestimmt und es wird genau in dieses kohärente Marktportfolio investiert. Um den Aufwand für die Umschichtungen gering zu halten, wird am jeweils ersten Wochenende im Monat die Analyse durchgeführt und zur Eröffnung am folgenden Montag wird die Portfolio-Umstellung vorgenommen.

6.2 Backtest der Anlage in kohärenten Marktportfolios

6.3 Backtest im Europäischen Markt

Die für den Backtest herangezogenen Sektor-ETFs im Europäischen Markt sind nachfolgend aufgeführt. Sofern eine ETF erst während der Backtest-Phase aufgelegt wurde, so wurde er erst 1 Jahr nach Auflegedatum für eine Anlage in Betracht gezogen. Als Referenzanlage dient in diesem Markt der *iShares STOXX Europe 600 ETF* und als Zins für die deterministische Anlage wurde der Zinssatz für die Einlagefazilität der Europäischen Zentralbank herangezogen.

iShares STOXX 600 Automobiles & Parts	iShares STOXX 600 Oil & Gas
iShares STOXX 600 Banks	iShares STOXX 600 Personal & Household Goods
iShares STOXX 600 Chemicals	iShares STOXX 600 Retail EX
iShares STOXX 600 Construction & Materials	iShares STOXX 600 Technology
iShares STOXX 600 Financial Services	iShares STOXX 600 Telecommunications
iShares STOXX 600 Food & Beverage	iShares STOXX 600 Travel & Leisure
iShares STOXX 600 Health Care	iShares STOXX 600 Utilities
iShares STOXX 600 Ind. Goods & Services	iShares STOXX Europe 600 Basic Resources
iShares STOXX 600 Insurance	iShares STOXX Europe 600 Real Estate Cap
iShares STOXX 600 Media	

Tabelle 1: Die ETFs für den Backtest im Europäischen Markt

In den beiden nachfolgenden Bildern ist der Kursverlauf des **Buy-And-Hold-Ansatzes** und der **Anlage in dem kohärenten Marktpotfolio** bei Vorliegen einer ausreichenden Marktbreite gemäß der beschriebenen Strategie zu sehen. Der Vorteil ist offensichtlich: Es gibt einen größeren Ertrag bei gleichzeitig geringerem Drawdown. Die Wahl der Methode zum Schätzen der Renditen der ETFs hat natürlich einen Einfluß auf die Ergebnisse, aber der Vorteil ist unabhängig von der gewählten Schätzmethode (Rate-of-Change oder Lineare Interpolation). Ferner sind auch die Phasen zu erkennen, in denen die auf dem kohärenten Marktpotfolio beruhende Strategie nur im Geldmarkt investiert ist.

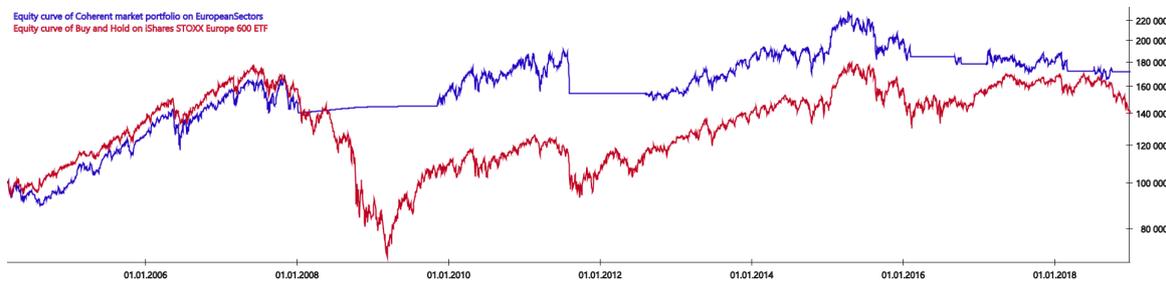


Abbildung 5: Backtest Europäischer Markt und Rendieschätzung mittels Rate of Change

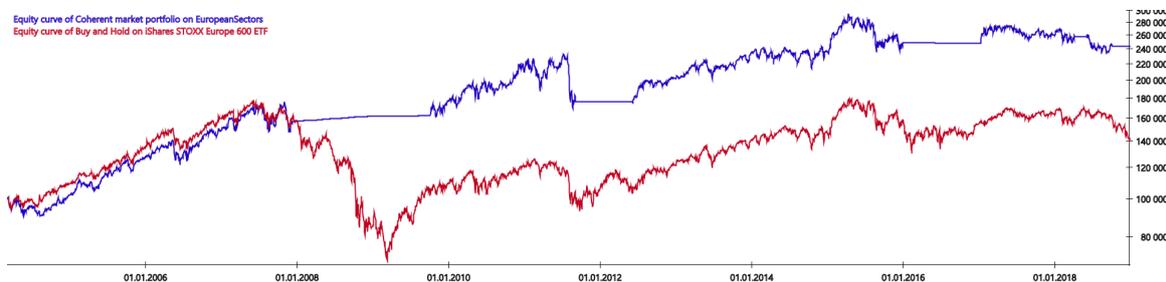


Abbildung 6: Backtest Europäischer Markt und Rendieschätzung mittels linearer Interpolation

Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Buy-and-Hold	kohärentes Marktportfolio mit Rate-of-Change lineare Interpolation	
Zeitraum	1.1.2004 - 31.12.2018		
Startkapital	100.000 EUR		
Endkapital	141.945 EUR	171.735 EUR	242.975 EUR
max. Drawdown	60,8 %	28,0 %	27,3 %

Tabelle 2: Kennzahlen des Backtest im Europäischen Markt

6.4 Backtest im Amerikanischen Markt

In dem amerikanischen Markt fällt die typische Differenzierung nach Sektoren weniger granular aus und die für den Backtest verwendeten ETFs lauten:

S&P 500 Communication Sector SPDR	S&P 500 Industrial Sector SPDR
S&P 500 Cons Staples Sector SPDR	S&P 500 Info Tech Sector SPDR
S&P 500 Consumer Disc Sector SPDR	S&P 500 Materials Sector SPDR
S&P 500 Energy Sector SPDR	S&P 500 Real Estate Sector SPDR
S&P 500 Financials Sector SPDR	S&P 500 Utilities Sector SPDR
S&P 500 Healthcare Sector SPDR	

Tabelle 3: Die ETFs für den Backtest im Amerikanischen Markt

Als Referenzanlage dient in diesem Markt der *S&P 500 SPDR* und als Zins für die deterministische Anlage wurde die „Federal funds effective rate“ der Amerikanischen Notenbank verwendet. Wie schon bei dem Europäischen Markt zeigt sich auch in diesem Backtest, dass die Equity-Kurve des **Buy-And-Hold-Ansatzes** schlechter aussieht als die Equity-Kurve der **Anlage in dem kohärenten Marktpotfolio**.



Abbildung 7: Backtest Amerikanischer Markt und Rendieschätzung mittels Rate of Change

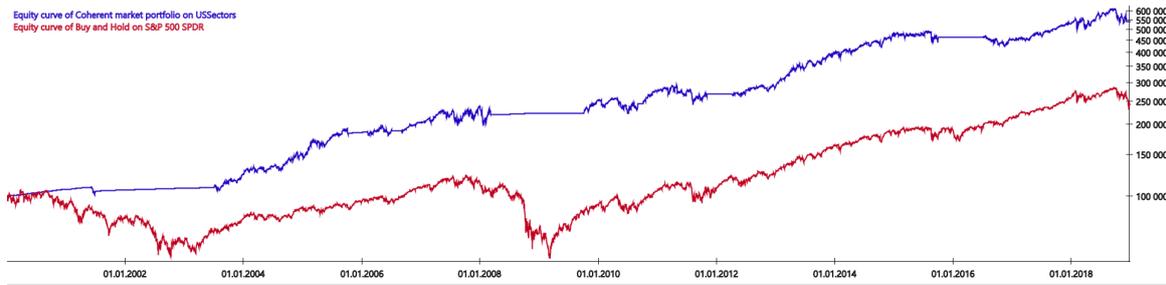


Abbildung 8: Backtest Amerikanischer Markt und Rendieschätzung mittels linearer Interpolation

	Buy-and-Hold	kohärentes Marktportfolio mit Rate-of-Change lineare Interpolation	
Zeitraum	1.1.2000 - 31.12.2018		
Startkapital	100.000 USD		
Endkapital	243.197 USD	480.784 USD	539.120 USD
max. Drawdown	55,2 %	17,4 %	17,2 %

Tabelle 4: Kennzahlen des Backtest im Amerikanischen Markt

7 Zusammenfassung

„Lege nicht alle Eier in einen Korb!“ ist die klassische Redewendung, mit der auf die Diversifikation in der Wertpapieranlage hingewiesen wird. Die theoretische Grundlage für den Nutzen der Diversifikation geht dabei auf die Moderne Portfoliotheorie von Harry Markowitz und William Sharpe zurück. Trotz der großen Bedeutung ihrer Arbeit für die Wirtschaftswissenschaften werden zwei Kritikpunkte an ihrer Arbeit oft genannt: Zum einen gehen sie nicht auf die Schätzung der Renditen der Aktien in einem Portfolio ein und zum anderen verwenden sie die Standardabweichung als Risikomaß. Neuere Forschungen haben einen neuen Begriff der kohärenten Risikomaße geprägt und die Schätzung von Aktien-Renditen ist ein klassisches Anwendungsgebiet der Technischen Analyse. In der vorliegenden Arbeit wurden Lösungen für die Kritikpunkte an der Modernen Portfoliotheorie vorgestellt und einem ersten Praxistest unterzogen.

Für die Schätzung von Wertpapier-Renditen wurde mit zwei sehr einfachen Verfahren gearbeitet; dass allein diese Verfahren schon einen Vorteil bringen ist nebenbei noch ein Beweis für den berühmten Ausspruch „The trend is your friend!“ In den beiden Backtests brachte das kohärente Marktportfolio auf Basis der Renditeschätzung mittels Linearer Regression bessere Resultate als der primitive Ansatz mittels Rate-of-Change: Das verstärkt die Vermutung, dass mit besseren Prognoseverfahren aus der Technischen Analyse hier noch bessere Resultate erzielt werden können.

Unter dem Gesichtspunkt des Risikos überzeugt die vorgestellte Strategie auf Basis des kohärenten Marktportfolios ebenfalls. Die maximalen Drawdowns der Strategien liegen sehr deutlich unter dem Drawdown eines Buy-and-Hold Ansatzes.

Zusammengefasst liefert eine kohärente Risikomessung und eine Schätzung von Aktienrenditen mit Hilfe der Technischen Analyse die nötigen Bausteine zur Fortschreibung der klassischen Portfoliotheorie. Es wird ein kohärentes Marktportfolio definiert, das die einleitend genannte Redewendung konkretisiert. Es wird nämlich ein Verfahren etabliert, mit dem genau festgelegt wird, wie stark in welche Aktie investiert werden soll, also „wieviele Eier in welchen Korb gelegt werden sollen“.

Quellenverzeichnis

Literatur

- [1] Carlo Acerbi, Dirk Tasche: On the coherence of expected shortfall, *Journal of Banking & Finance*, Volume **26**, S. 1487 - 1503, (July 2002).
- [2] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber and David Heath: Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, Volume **9**, Issue 3, pp. 203-228 (July, 1999).
- [3] Basel Committee on Banking Supervision: *Fundamental review of the Trading book: A revised market risk framework* Bank for International Settlements, available at <https://www.bis.org/publ/bcbs265.htm>, (Oktober 2013)
- [4] *Brockhaus Enzyklopädie* F.A. Brockhaus GmbH, 19. Auflage, Band 18 Rad-Rüs, (1992).
- [5] Paul Embrechts und Ruodu Wang: Seven Proofs for the Subadditivity of Expected Shortfall, *Dependence Modeling*, Volume **3**, Issue 1, (2015).
- [6] Glyn A. Holton: *Value-at-Risk*, Second edition, Eigenverlag des Authors, (2014).
<https://www.value-at-risk.net>
- [7] Harry M. Markowitz: Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, Volume **7**, Issue 1, pp. 77-91, (March, 1952).
- [8] Alexander McNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press (2005).
- [9] William F. Sharpe: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk *The Journal of Finance*, Volume **19**, Issue 3, pp. 425-442, (September, 1964).
- [10] Saša Žiković, Randall K. Filer: *Ranking of VaR and ES Models: Performance in Developed and Emerging Markets*, Working Paper, CERGE-EI, Prag, (März 2011).
https://iweb.cerge-ei.cz/pdf/events/papers/111202_t.pdf

Marktdaten-Quellen

Die Kursdaten für die ETFs im Europäischen Markt wurden über die vwd group (www.vwd.com) unter Verwendung der Software TaiPan End-of-Day (www.lp-software.de) bezogen. Die Kursdaten für die Amerikanischen Sektor-ETFs wurden über finance.yahoo.com von Verizon Media und die Daten zu den Einlagezinsen bei den Notenbanken von den Webseiten der jeweiligen Notenbank bezogen.

A Beweise der Lemmata aus 3.2

A.1 Beweis von Lemma 1

Lemma 1 *Die Standardabweichung ist kein kohärentes Risikomaß. Sie erfüllt zwar die Axiome Positive Homogenität und Subadditivität, aber die Standardabweichung ist weder monoton noch translationsinvariant.*

Beweis: In diesem Beweis bezeichnet \mathbf{S} die Standardabweichung und $\mathbf{V} = \mathbf{S}^2$ die Varianz. Mit $\lambda \geq 0$ und $L \in \mathcal{L}$ ergibt sich die Positive Homogenität aus der Linearität des Erwartungswertes gemäß

$$\mathbf{S}(\lambda L) = \sqrt{\mathbb{E}[(\lambda L - \mathbb{E}[\lambda L])^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[\lambda^2 (L - \mathbb{E}[L])^2]} = \lambda \mathbf{S}(L) \quad (51)$$

Zum Nachweis der Subadditivität wird zunächst die Varianz der Summe von $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ betrachtet:

$$\mathbf{V}(L_1 + L_2) = \mathbf{V}(L_1) + \mathbf{V}(L_2) + 2 \mathbf{Cov}(L_1, L_2) \quad (52)$$

Mit der Cauchy-Schwarzen Ungleichung für die Kovarianz ($\mathbf{Cov}(L_1, L_2) \leq \mathbf{S}(L_1)\mathbf{S}(L_2)$) folgt:

$$\mathbf{V}(L_1 + L_2) \leq \mathbf{V}(L_1) + \mathbf{V}(L_2) + 2 \mathbf{S}(L_1)\mathbf{S}(L_2) \quad (53)$$

$$= \mathbf{S}^2(L_1) + \mathbf{S}^2(L_2) + 2 \mathbf{S}(L_1)\mathbf{S}(L_2) \quad (54)$$

$$= (\mathbf{S}(L_1) + \mathbf{S}(L_2))^2 \quad (55)$$

Durch Anwendung der Wurzelfunktion folgt unmittelbar die Subadditivität der Standardabweichung.

Die Standardabweichung genügt einem anderen Translationsgesetz, das leicht gezeigt via:

$$\mathbf{S}(L + \lambda) = \sqrt{\mathbb{E}[(L + \lambda - \mathbb{E}[L + \lambda])^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[(L + \lambda - \mathbb{E}[L] - \lambda)^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[(L - \mathbb{E}[L])^2]} = \mathbf{S}(L) \quad (56)$$

Die fehlende Monotonie der Standardabweichung wird durch ein Beispiel belegt. Sei $\Omega = \{\omega_+, \omega_-\}$ und beide Szenarien werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit von 50% angenommen. Ferner sei

$$L_1 = \begin{cases} -3 & \text{im Szenario } \omega_+ \\ 1 & \text{im Szenario } \omega_- \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} -1 & \text{im Szenario } \omega_+ \\ 1 & \text{im Szenario } \omega_- \end{cases} \quad (57)$$

In diesem Beispiel verlieren beide Portfolios 1 im Szenario ω_- , aber L_1 gewinnt im Szenario ω_+ deutlich mehr. Offensichtlich ist L_1 das bessere Portfolio und es gilt $L_1 \leq L_2$ für die beiden Szenarien. Die Standardabweichung von L_1 beträgt in diesem Fall 8 und das schlechtere Portfolio L_2 hat die geringere Standardabweichung $\sqrt{2}$. Damit ist die Standardabweichung nicht monoton. \square

A.2 Beweis von Lemma 2

Lemma 2 *Der Value at Risk erfüllt die drei Axiome Positive Homogenität, Monotonie und Translationsinvarianz. Es ist jedoch nicht subadditiv und damit kein kohärentes Risikomaß.*

Beweis: Aus $\mathbb{P}[\lambda L \leq \lambda x] = \mathbb{P}[L \leq x]$ für $\lambda \geq 0$ und $L \in \mathcal{L}$ ergibt sich unmittelbar die Positive Homogenität. Mit einem ähnlichen Argument kann auch die Translationsinvarianz nachgewiesen werden, denn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}[L + \lambda \leq x + \lambda] = \mathbb{P}[L \leq x]$.

Aus $L_1 \leq L_2$ folgt $\mathbb{P}[L_1 \leq x] \geq \mathbb{P}[L_2 \leq x]$ was wiederum impliziert, dass aus $\mathbb{P}[L_2 \leq x] \geq \alpha$ folgt, dass $\mathbb{P}[L_1 \leq x] \geq \alpha$ gilt. Damit ergibt sich die Monotonie des Value at Risk.

Das klassische Gegenbeispiel für die Subadditivität des Value at Risk basiert auf potentiell ausfallenden Bond-Investments. Die beiden Portfolios L_1 bzw. L_2 bestehen jeweils aus einem Bond, die beide, unabhängig voneinander, mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% ausfallen. Der Value at Risk zum 95%-Quantil dieser beiden Portfolios ist jeweils 0, da der Ausfall der Bonds zu unwahrscheinlich für das gewählte Konfidenzniveau ist. Für ein Depot, das aus den beiden Bonds besteht, sieht die Betrachtung wie folgt aus: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 92.16% fällt kein Bond aus, mit einer Wahrscheinlichkeit von 7.68% fällt genau ein Bond aus und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.16% fallen beide Bonds aus. Das 95% Quantil dieser Verteilung entspricht dem Ausfall eines Bonds und ist damit größer als die Summe der Einzelrisiken (0+0). \square

A.3 Beweis von Lemma 3

Lemma 3 Eine alternative Formulierung des Expected Shortfall ist gegeben durch

$$\text{ES}_\alpha(L) = \text{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[(L - \text{VaR}_\alpha(L))^+ \right] \quad (58)$$

Dabei bezeichnet \mathbb{E} den Erwartungswert zum Maß \mathbb{P} und $(x)^+$ den Positivteil von x , d.h. $(x)^+ := \max(0, x)$.

Beweis: Dieser Beweis orientiert sich an [5]. Zunächst wird ein klassisches Ergebnis zur Umwandlung zwischen allgemeinen Verteilungsfunktionen und der Gleichverteilung auf $[0, 1]$ benötigt. Dieses besagt, dass zu jeder Zufallsvariablen L mit Verteilungsfunktion F_L es eine gleichverteilte Zufallsvariable U_L auf $[0, 1]$ gibt so dass fast sicher gilt $L = F_L^{-1}(U_L)$. Für den Fall, dass F stetig ist, ist die Aussage trivial - im allgemeinen Fall kann U_L konstruiert werden via

$$U_L = F_L(L-) + V F_L(L-) \quad (59)$$

Dabei bezeichnet $F_L(L-)$ den linken Grenzwert der Verteilungsfunktion und V eine von L unabhängige Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Offensichtlich ist U gleichverteilt aufgrund der Konstruktion gilt $L = F_L^{-1}(U_L)$.

Damit gilt für ein gleichverteiltes u auf $[0, 1]$ die Beziehung $L = F_L^{-1}(u) = \text{VaR}_u(L)$ und das erlaubt:

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) du \quad (60)$$

$$= \text{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \left(\text{VaR}_u(L) - \text{VaR}_\alpha(L) \right) du \quad (61)$$

$$= \text{VaR}_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[(L - \text{VaR}_\alpha(L))^+ \right] \quad (62)$$

□

A.4 Beweis von Lemma 4

Zunächst wird ein weiterer Hilfssatz formuliert, der nachfolgend in dem Beweis von Lemma 4 zum Einsatz kommt.

A.4.1 Ein weiterer Hilfssatz

Lemma 5 Eine alternative Darstellung des Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(L)$ mit $L \in \mathcal{L}$ lautet:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} \left\{ v + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[(L - v)^+ \right] \right\} \quad (63)$$

Beweis: Sei $f(v) = v + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[(L - v)^+ \right]$ und F_L die Verteilungsfunktion von L . Dann gilt unter Verwendung der partiellen Integration:

$$f(v) = v + \frac{1}{1-\alpha} \int_v^\infty (x - v) dF_L(x) \quad (64)$$

$$= v + \frac{1}{1-\alpha} \left[(x - v)(F_L(x) - 1) \right]_v^\infty - \frac{1}{1-\alpha} \int_v^\infty (F_L(x) - 1) dx \quad (65)$$

$$= v + \frac{1}{1-\alpha} \int_v^\infty (1 - F_L(x)) dx \quad (66)$$

Sei $v_0 := \text{VaR}_\alpha(L)$ und $v_1 > v_0$. Dann gilt:

$$f(v_1) - f(v_0) = v_1 - v_0 - \frac{1}{1-\alpha} \int_{v_0}^{v_1} (1 - F_L(x)) dx \quad (67)$$

$$\geq v_1 - v_0 - \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha)(v_1 - v_0) \quad (68)$$

$$= 0 \quad (69)$$

Die vorstehende Ungleichung ergibt sich dabei unter Verwendung von $F_L(x) \geq \alpha$ für $x \in [v_0, v_1]$. Für die Betrachtung der anderen Seite sei $v_2 < v_0$. Dann gilt

$$f(v_2) - f(v_0) = v_2 - v_0 - \frac{1}{1-\alpha} \int_{v_2}^{v_0} (1 - F_L(x)) dx \quad (70)$$

$$\geq -(v_0 - v_2) + \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha)(v_0 - v_2) \quad (71)$$

$$= 0 \quad (72)$$

Dabei gilt wegen $v_2 < v_0$ in diesem Fall $F_L(x) \leq \alpha$ für $x \in [v_2, v_0]$.

Insgesamt gilt also $f(v_2) \geq f(v_0)$ für $v_2 < v_0$ und $f(v_1) \geq f(v_0)$ für $v_1 > v_0$ und damit die verwendete Charakterisierung des Value-at-Risk als dasjenige Argument, welches die Funktion f minimiert. \square

A.4.2 Der Beweis von Lemma 4

Lemma 4 *Der Expected Shortfall ist ein kohärentes Risikomaß.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass der Expected Shortfall alle 4 Axiome eines kohärenten Risikomaßes erfüllt. Für die drei Axiome Positive Homogenität, Monotonie und Translationsinvarianz wird unter Verwendung von Lemma 2 gezeigt, d.h. es wird ausgenutzt dass diese Axiome für den Value at Risk gelten.

Sei $\lambda \geq 0$ und $L \in \mathcal{L}$. Dann gilt:

$$\text{ES}_\alpha(\lambda L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\alpha(\lambda L) dp = \lambda \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\alpha(L) dp = \lambda \text{ES}_\alpha(L) \quad (73)$$

Seien $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ mit $L_1 \leq L_2$. Dann gilt:

$$\text{ES}_\alpha(L_1) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\alpha(L_1) dp \leq \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\alpha(L_2) dp = \text{ES}_\alpha(L_2) \quad (74)$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathcal{L}$. Dann gilt:

$$\text{ES}_\alpha(L + \lambda) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\alpha(L + \lambda) dp = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\alpha(L) dp + \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \lambda dp = \text{ES}_\alpha(L) + \lambda \quad (75)$$

Bleibt noch die Subadditivität des Expected Shortfalls zu zeigen, die sich aus Lemma 3 ergibt. Seien $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ und bezeichne $\text{VaR}_i = \text{VaR}_\alpha(L_i)$ für $i = 1, 2$ dann gilt wegen $x^+ + y^+ \geq (x + y)^+$:

$$\text{ES}_\alpha(L_1) + \text{ES}_\alpha(L_2) = \text{VaR}_1 + \text{VaR}_2 + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[(L_1 - \text{VaR}_\alpha(L_1))^+ + (L_2 - \text{VaR}_\alpha(L_2))^+ \right] \quad (76)$$

$$\geq \text{VaR}_1 + \text{VaR}_2 + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[(L_1 + L_2 - \text{VaR}_1 - \text{VaR}_2)^+ \right] \quad (77)$$

$$\geq \min_v \left\{ v + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[(L_1 + L_2 - v)^+ \right] \right\} \quad (78)$$

$$= \text{ES}_\alpha(L_1 + L_2) \quad (79)$$

Dabei gilt die letzte Gleichung aufgrund Lemma 5, das besagt, dass das Minimum in (78) für $v = \text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2)$ angenommen wird. \square