

Trend-Adaptive Moving Averages (TAMAs)

Glättung, Prognose, Bänder

Dr. Patrick Winter (mail@patrick-winter.de)

VTAD-Award 2022, 3. Platz

Inhalt

1. Einführung	1
2. Grundlegende Herleitung	4
2.1 Genauere Betrachtung des Problems	4
2.2 Idee und Ansatz	5
2.3 Basis-Formalisierung	7
3. Anwendungszwecke und Erweiterungen	8
3.1 Glättung	8
3.2 Prognose	10
3.3 Bänder	12
4. Trend-Adaption klassischer MAs	15
4.1 Herleitung des allgemeinen Verfahrens	15
4.2 Der Harmonic MA (HMA) als Pendant des einfachsten TAMA	17
4.3 Konkretisierungen für bekannte MAs	18
4.4 Vergleich wichtiger TAMAs	20
5. Praktische Anwendung	21
5.1 Glättung	21
5.2 Prognose	23
5.3 Bänder	23
6. Zusammenfassung und Fazit	25
Implementation in MetaTrader	26
Anhang: Herleitung der Regressionskoeffizienten in (5a) und (5b)	26
Referenzen	27

1. Einführung

Moving Averages (Gleitende Durchschnitte, MAs) zählen zu den grundlegendsten und wichtigsten Instrumenten der technischen Analyse. Ihre große Bedeutung beziehen sie dabei primär aus ihrer inhaltlichen Interpretation: Wohl kein anderer Indikator reflektiert so direkt den „wahren Wert“ einer Anlageoption innerhalb eines bestimmten Zeitraums. Zudem kann dieser wahre Wert nur selten unmittelbar am aktuellen Kurs abgelesen werden, denn jener ist durch quasi-zufälliges Rauschen gestört; MAs filtern dieses durch Glättung heraus und erlauben so einen Blick auf das Wesentliche. Gerade das ermöglicht es Analysten auch, auf der Basis von MAs Prognosen über die zukünftige Kursentwicklung zu treffen – etwa durch den Vergleich mehrerer MAs verschiedener Periodendauer untereinander oder durch Bildung von Korridoren (Bändern) für den weiteren Verlauf. Diese Anwendungen sind auch gute Beispiele für den sekundären wesentlichen Grund dafür, warum MAs so bedeutend sind: Sie können nicht nur für sich selbst betrachtet werden, sondern finden häufig auch Eingang in die Berechnung anderer, darauf aufbauender Indikatoren, etwa dem MACD oder Bollinger-Bändern.

Umso wichtiger ist es dann natürlich, dass MAs den wahren Wert des Kurses auch tatsächlich verzerrungsfrei (erwartungstreu, unbiased) wiedergeben. Sieht man sich die Formel zur Berechnung etwa des einfachsten MAs an, des Simple Moving Average (SMA)

$$SMA_n(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k_{t-i+1} \quad (1)$$

wobei k_t der Kurs zum Zeitpunkt t und n die frei wählbare Periodendauer – i.d.R. der einzige Parameter eines MAs – ist, so ist man geneigt, dies unmittelbar zu glauben: Nicht nur, dass sich darin kein augenscheinlicher Anhaltspunkt für irgendeine Verzerrung findet; die Definition ist auch identisch mit der Berechnung des arithmetischen Mittels

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

von dem man weiß, dass es nicht nur unverzerrt, sondern sogar der beste lineare unverzerrte Schätzer (BLUE) für den Erwartungswert der die Ausprägungen x_i erzeugenden Zufallsvariablen X ist (vgl. z.B. Pfeifer 2018).

In der Praxis der technischen Analyse treten jedoch alltäglich Fälle wie der in Abbildung 1 beispielhaft gezeigte auf: Die eingesetzten MAs – egal, welche es genau sind – scheinen die Kursentwicklung während eines Aufwärtstrends systematisch zu unter- und während eines Abwärtstrends systematisch zu überschätzen, also keineswegs erwartungstreu zu sein.

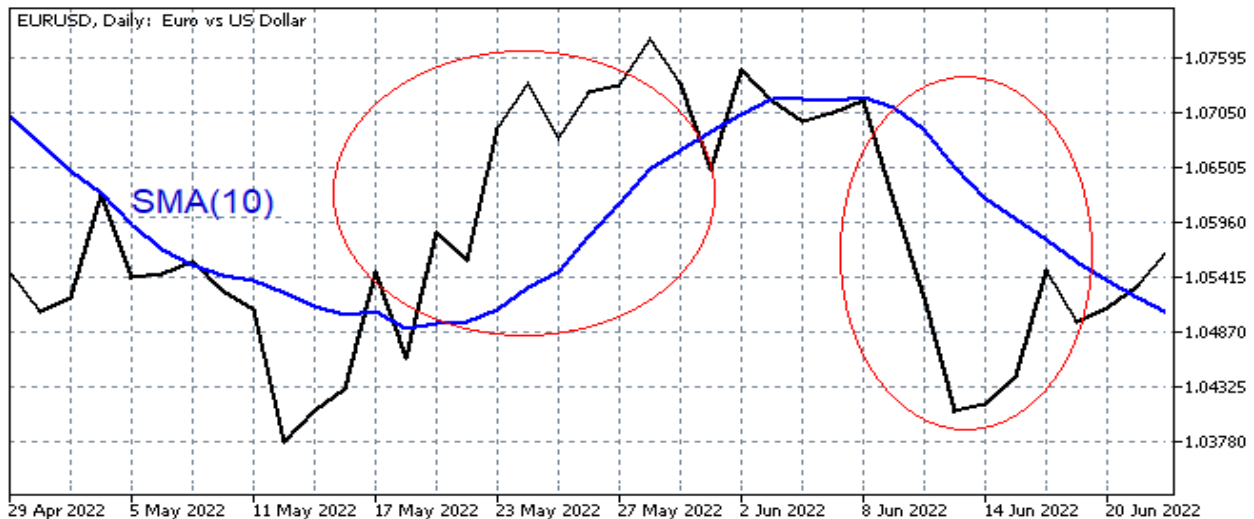


Abbildung 1: Typische Abweichungen von MAs (hier des SMA(10)) zum Kurs während Trends.

Wie ist dieser vermeintliche Widerspruch zu erklären? Der Grund dafür liegt darin, dass die Kurse k_t eben nicht, wie es bei der Berechnung des arithmetischen Mittels vorausgesetzt wird, Realisationen ein- und derselben – insb. also identisch verteilten – Zufallsvariablen sind (also kein Sample bilden). Viel eher ist jeder Kurs k_t zunächst einmal als die einzige Ausprägung einer *eigenen* Zufallsvariablen K_t zu interpretieren, und es ist keineswegs gesagt, dass diese dieselbe Verteilung – oder auch nur dieselbe Lage bzw. Erwartung – besitzen muss wie die vorhergehende (K_{t-1}); im Gegenteil: Es entspricht gerade der *Definition* eines Trends, dass dies nicht der Fall ist. Dieser Zusammenhang wird später noch einmal genauer betrachtet werden.

Zunächst ist aber zu klären, welche praktischen Nachteile dieser Effekt mit sich bringt. Die Antwort darauf hängt v.a. vom jeweiligen Anwendungszweck der MAs ab: Werden sie allein zur „menschlichen“ Analyse eines Kursverlaufs eingesetzt, so kann ihrer Verzerrung mit einer entsprechenden Verzerrung (d.h. Anpassung) ihrer Interpretation begegnet werden. In der Tat ist das die heute gängige Praxis, und nicht selten wird das Über- bzw. Unterschreiten der Kurslinie durch einen MA dabei als Signal für eine Trendänderung gewertet (z.B. Admirals 2022). Wir werden später noch sehen, dass diese Auslegung nicht immer unproblematisch ist.

Noch viel schwerer wiegt der Trendeffekt aber, wenn MAs als Input für mathematische Systeme – das können andere technische Indikatoren sein, aber auch Prognose-Algorithmen und ganze Handelssysteme – verwendet werden; jene können schließlich nur höchstens so gut sein wie die Daten, die sie zur Verarbeitung übergeben bekommen. Ein illustratives Beispiel dafür sind Bollinger-Bänder: Diese sollen ja ein Fenster bilden, in das der Kurs wahrscheinlich fallen wird; wie könnten sie das aber, wenn sie schon um einen verzerrten Mittelwert herum gelegt werden? Am sichtbarsten wird das Problem schließlich aber bei der Glättungsaufgabe: Wie die roten Kreise ganz offenkundig machen, kann man während Trends wirklich nicht mehr von einer Glättung *des Kurses* sprechen – der MA liegt ja meterweit davon entfernt!

Dabei drängt sich eine Frage auf: Wenn man schon weiß, bzw. allein durch Hinschauen erkennen kann, dass und sogar wie sehr der MA vom Kurs entfernt liegt, kann man ihn dann nicht einfach mathematisch ebenso verschieben, wie man es mental kann, seine Verzerrung also formal korrigieren? In der Tat wäre das möglich, aber leider nur dann, wenn man – wie es beim Betrachten der Abbildung der Fall ist – die Entwicklung im Nachhinein betrachtet, insb. also schon weiß, wann genau der Trend verläuft. Meist sollen MAs aber während der laufenden Kursentwicklung („online“) berechnet werden, und zu jenen Zeitpunkten stehen die notwendigen Daten noch nicht fest. Dies ist wahrscheinlich auch der wesentliche Grund dafür, warum MA trotz ihrer großen Bedeutung für die technische Analyse noch immer nicht trendangepasst sind.

Nun braucht man dieses Ansinnen aber deshalb nicht gleich aufzugeben. Zwar ist der Trend zum Zeitpunkt der MA-Berechnung noch nicht vollständig absehbar, es existieren jedoch Verfahren, ihn zu schätzen, trotz des dann noch sehr kurzen Trendfensters sogar robust zu schätzen, und die dadurch erhaltenen Informationen können in MAs integriert werden. In der vorliegenden Arbeit wird mit Trend-Adaptive Moving Averages (TAMAs)¹ ein solcher Ansatz entwickelt. TAMAs sind dabei nicht als weitere Varianten von MAs zu sehen, sondern als deren trendangepasste Versionen; ihre „Entzerrung“ lässt sich dabei über einen Parameter zu Vergleichszwecken an- und ausschalten. Daneben weisen TAMAs durch die spezielle Art ihrer Berechnung weitere Vorteile auf; insb. lassen sie sich spezifisch auf die üblichen Anwendungszwecke zuschneiden und bieten auch ohne zusätzliche Indikatoren neue Anhaltspunkte zur Prognose des zukünftigen Kursverlaufs sowie zur Bildung von Bändern um diesen herum.

¹ Die Bezeichnung „Adaptive“ bezieht sich dabei darauf, dass sich TAMAs, wie noch deutlich werden wird, dynamisch an Trends anpassen. Mit andersartigen „Adaptive MA“-Indikatoren, wie sie auch in Handelsprogrammen vorkommen, etwa dem nach Kaufman (1995, S. 129-153), hat dies nichts zu tun.

2. Grundlegende Herleitung

2.1 Genauere Betrachtung des Problems

Wie in der Einführung schon erwähnt wurde, liegt das zentrale Problem bei der Berücksichtigung von Trends in MAs darin, dass diese per Definition die Annahme verletzen, dass zwei aufeinanderfolgende Kurse aus der gleichen, insb. gleich-zentrierten, Verteilung gezogen werden. Abbildung 2 veranschaulicht dieses Problem anhand eines idealtypischen Kursverlaufs mit Glättung durch einen 5-periodigen SMA, zu jedem Zeitpunkt untersucht am Ende eines Tages und ohne Kenntnis der zukünftigen Kursentwicklung.

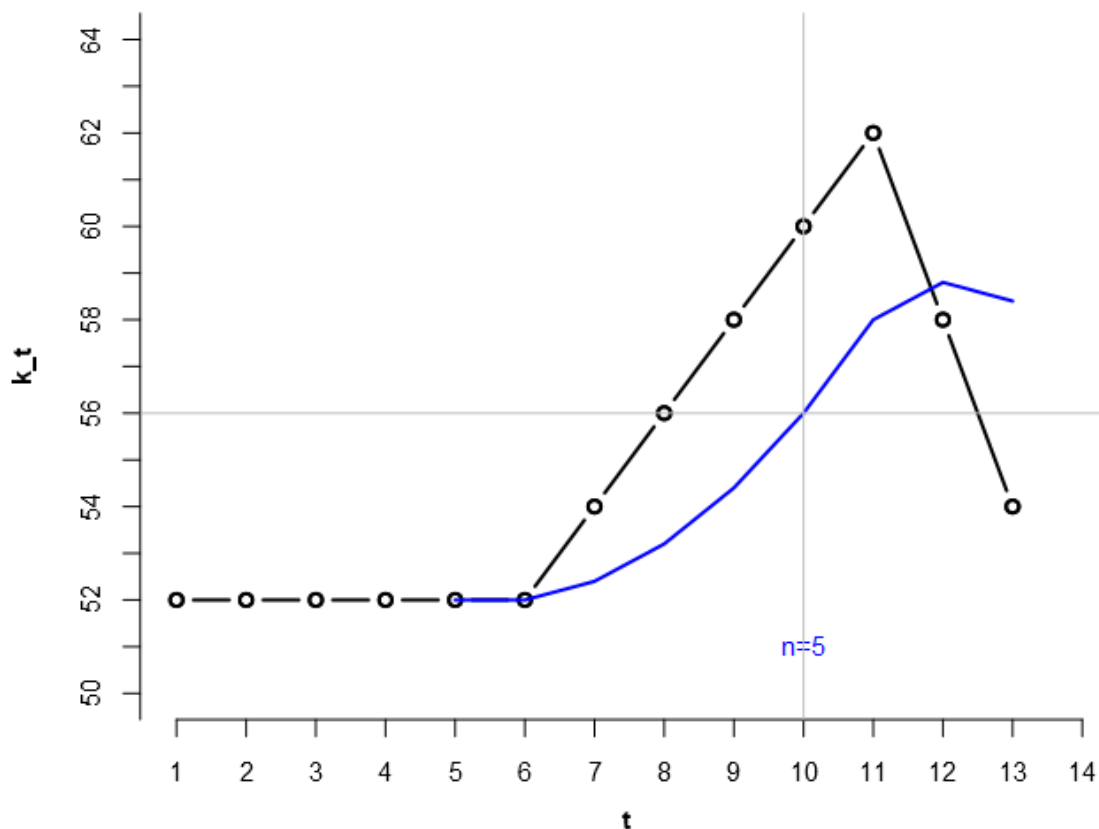


Abbildung 2: Idealtypischer Kursverlauf mit einem SMA(5).

Zunächst soll der Zeitpunkt $t=5$ betrachtet werden. Der Kurs lag hier fünfmal in Folge bei einem Wert von 52; entsprechend gilt $SMA_5(5) = 1/5 \cdot 5 \cdot 52 = 52$. Dies wäre auch die bestmögliche Prognose für $t=6$; und in der Tat: jener Tag endet erneut mit einem Wert von 52. Daher ist $SMA_5(6) = 52$, und die vorherige Prognose wäre nun auch für $t=7$ die beste. Doch nun kommt es anders: der Kurs steigt auf 54. Diese Information ist eine, die eine Aussagekraft für Analysten

besitzt. Das steht im Gegensatz zu $t=10$: Der Kurs ist vor diesem Zeitpunkt fünfmal äquidistant gestiegen. Unter dem schon erwähnten Paradigma, dass alle Kurswerte zwischen $t=6$ und $t=10$ aus derselben Verteilung gezogen wurden, wäre die beste Schätzung deren Erwartungswertes – und damit auch die beste Glättung für $t=10$ sowie die beste Prognose für $t=11$ – in der Tat die des SMA, nämlich $SMA_5(10) = 1/5 \cdot (52 + 54 + 56 + 58 + 60) = 56$. Unter dem Paradigma, dass ein Trend vorliegt, dass also $E(K_t) = E(K_{t-1}) + m$ für eine Konstante m gilt (im Beispiel $m = 2$), lägen die entsprechenden Werte dagegen genau auf dem Kurs, bei 60 für $t=10$ und bei 62 für $t=11$. Die Abweichung des SMA davon stellt unter letzterem Paradigma also *keine* relevante Information für Analyten dar – bzw. sogar eine irreführende –, denn sie resultiert lediglich aus der mathematischen Vernachlässigung des Trends.

2.2 Idee und Ansatz

Woher weiß man nun aber, welches Paradigma das jeweils richtige ist? Tatsächlich wissen kann man es nur im Nachhinein; bei der Analyse während der laufenden Kursentwicklung muss man sich mit schätzen begnügen. Glücklicherweise lässt sich die Situation ohne Trend dazu leicht als Spezialfall der Situation mit Trend modellieren, und dann anhand des zurückliegenden Kurses evaluieren, wie wahrscheinlich dieser Spezialfall ist.

Der intuitivste Ansatz, der einem dazu in den Sinn kommt, wäre wohl, ein einfaches lineares Regressionsmodell des Kurses mit dem Zeitindex als einziger erklärender Variabler zu erstellen und dieses dann mit den Daten aus dem aktuellen MA-Fenster – bei einem n -periodigen MA zum Zeitpunkt t also zwischen den Kursen k_{t-n+1} und k_t – zu trainieren. Der Schätzwert \hat{k}_t , der sich anhand der so erhaltenen Regressionsgeraden für k_t ergibt (obwohl dieser Kurs ja bereits bekannt ist!), könnte dann den Wert des trendangepassten MAs an t darstellen.

Tatsächlich entspricht dieser Ansatz, wie wir noch sehen werden, mathematisch gerade der trendangepassten Version des SMA, dem Simple TAMA (TASMA).² Allerdings weist er im Vergleich zu den anderen TAMA-Varianten einige wesentliche Schwäche auf; insb. ist er nicht robust, etwa nicht bzgl. der Wahl von n . Abbildung 3 illustriert dieses Problem und dessen Lösung anhand des Kursverlaufs aus Abbildung 2.

² Der hier beschriebene TASMA (ohne die noch folgenden Erweiterungen) ist im Wesentlichen identisch mit dem vielfach diskutierten Linear Regression Slope Indikator (z.B. Chande und Kroll 1994, S. 20ff.).

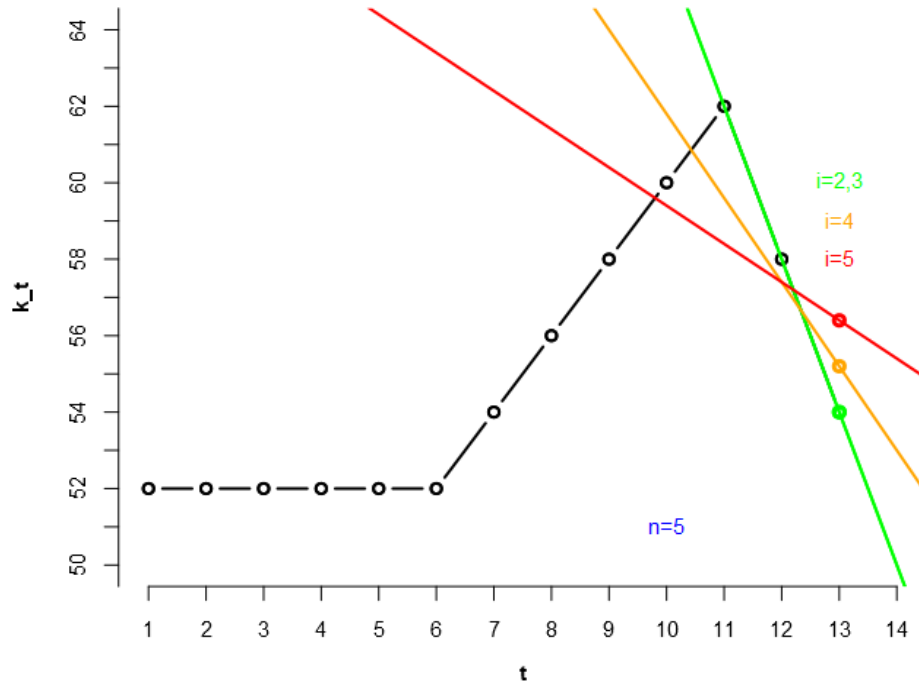


Abbildung 3: Verschiedene Regressionsgeraden mit Trend an den Kursverlauf aus Abbildung 2.

Betrachten wir zunächst nur die rote Linie. Diese ist die Regressionsgerade, die sich nach dem gerade beschriebenen Verfahren für $n = 5$ ergeben würde. In ihre Berechnung ist der gesamte zum aktuellen Zeitpunkt $t=13$ vorliegende Abwärtstrend, d.h. die Punkte $t=13$, $t=12$ und $t=11$ eingeflossen, aber auch die – wie nur in diesem illustrativen Beispiel eindeutig zu erkennen ist – nicht dazu gehörenden Punkte $t=10$ und $t=9$. Hätte man stattdessen eine andere Periodendauer gewählt, z.B. $n = 3$, so hätte sich die grüne Linie ergeben, die den Trend viel besser trifft; die Wahl ist also nicht irrelevant. Nun wird der Trend aber nicht immer gerade zufällig am Rand des Periodenfenster begonnen haben. Und auch, einen weiteren Parameter $i \leq n$ einzuführen, der den Anwender stattdessen einen anderen Startzeitpunkt spezifizieren lässt, würde nicht viel nützen, da jener ja nicht bekannt, und schon gar nicht für alle Fenster gleich ist.

Die Idee zur „Robustisierung“ der Regression besteht deshalb darin, sie nicht nur für *einen* Zeitpunkt des Fensters durchzuführen, sondern für *alle* Zeitpunkte $t - i + 1$ daraus (vgl. Linien in Abbildung 3), also mehrfach. So wird ein Trend, der erst nach dem linken Rand des Fensters begonnen hat, wie es in der Abbildung der Fall ist, trotzdem gefunden. Außerdem haben Punkte, die nicht zum Trend gehören, zwar weiterhin einen Einfluss auf manche Schätzungen, jedoch nurmehr auf die „linkeren“ davon (im Beispiel für $i \in [4; 5]$). Der (Gesamt-)Schätzwert \hat{k}_t für k_t ergibt sich dann als ein Durchschnitt der einzelnen Schätzwerte \hat{k}_{t_i} (vgl. farbige Punkte).

2.3 Basis-Formalisierung

Die beschriebene Idee soll nun formalisiert werden. Dazu wird hier zunächst ein Grundmodell eines TAMA entworfen, das dann in den folgenden Kapiteln immer mehr erweitert wird.

Die Herleitung des Modells erfolgt „von hinten nach vorne“, beginnt also mit dem letzten Schritt – der Berechnung eines n -periodigen TAMA zum Zeitpunkt t als Mittel der Schätzwerte $\widehat{k}_{t,i}$:

$$TAMA_n(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \widehat{k}_{t,i} \quad (3)$$

Der i -te Schätzwert soll nun jeweils Ergebnis einer eigenen linearen Regression sein, also auf der entsprechenden Regressionsgeraden liegen. Bezeichne $\widehat{\alpha}_i$ deren Achsenabschnitt und $\widehat{\beta}_i$ ihre Steigung, so lässt sich $\widehat{k}_{t,i}$ formalisieren als

$$\widehat{k}_{t,i} = \widehat{\alpha}_{t,i} + \widehat{\beta}_{t,i} \cdot i \quad (4)$$

denn gesucht ist der jeweils i -te Punkt auf der Geraden. Um das zu sehen, ist es hilfreich, noch einmal Abbildung 3 zu betrachten, z.B. für $i = 3$ (grüne Linie): Diese wird durch die Punkte k_{11} , k_{12} und k_{13} geschätzt, und nummeriert man diese von links nach rechts durch,³ so entspricht der Zeitpunkt der Schätzung $t = 13$ eben gerade dem i -ten (und damit letzten) Punkt.

Bei (4) handelt es sich um lineare Einfachregressionen, und für solche sind allgemeine Formeln zur direkten Berechnung von $\widehat{\alpha}_i$ und $\widehat{\beta}_i$ bekannt.⁴ Angepasst an den vorliegenden Fall ergeben sich nach einiger Rechnung (siehe Anhang) folgende Zusammenhänge:

$$\widehat{\alpha}_{t,i} = \bar{k}_{t,i} - \widehat{\beta}_{t,i} \cdot \frac{i+1}{2} \quad (5a)$$

$$\widehat{\beta}_{t,i} = \begin{cases} \frac{12}{i^3 - i} \cdot \sum_{j=1}^i \left(j - \frac{i+1}{2} \right) \cdot (k_{t-i+j} - \bar{k}_{t,i}), & \text{falls } i > 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5b)$$

wobei $\bar{k}_{t,i}$ das arithmetische Mittel der Kurse von k_{t-i+1} bis k_t bezeichnet (vgl. (2)).

³ Die Indexierung mag an manchen Stellen etwas verwirren, da MAs von rechts nach links berechnet, die Regressionsgeraden aber von links nach rechts gebildet werden. Mathematisch ist beides aber natürlich äquivalent.

⁴ Es ist anzumerken, dass wir kein direktes Interesse an diesen beiden Koeffizienten haben, sondern nur indirekt an dem sich daraus ergebenden Schätzwert $\widehat{k}_{t,i}$. Ganz im Gegensatz zu ersteren ist letzterer nämlich auch dann zuverlässig, wenn die Regression nur auf sehr wenigen Datenpunkten basiert; im Extremfall ($i = 1$) sogar nur auf einem einzigen – zweifelsohne stellt auch k_t eine adäquate Grundlage für $\widehat{k}_{t,i}$ dar (da aus einem einzelnen Punkt allerdings keine Gerade gebildet werden kann, muss $\widehat{\beta}_{t,i}$ dazu in (5b) manuell auf 0 gesetzt werden).

3. Anwendungszwecke und Erweiterungen

Nachdem der grundlegende TAMA damit vollständig spezifiziert ist, wird nun gezeigt, wie er für die üblichen Anwendungszwecke von MAs adaptiert und dabei ggf. erweitert werden kann.

3.1 Glättung

Zunächst soll der wohl typischste Anwendungszweck betrachtet werden, die Glättung. Dazu folgt noch zuvor aber gleich die erste TAMA-Erweiterung: ein „Schalter“, mit dem man seine Trendanpassung auf Wunsch deaktivieren kann. Dadurch ist es möglich, deren Effekt direkt am geglätteten Kurs visuell zu veranschaulichen.

Der Schalter ist formell ein boolescher Parameter, hier mit TA bezeichnet, der zur Deaktivierung auf den Wert „falsch“ (d.h. 0) gesetzt werden muss; standardmäßig liegt er bei „wahr“ (d.h. 1). TA kann in einen TAMA eingebaut werden, indem (5b) wie folgt verändert wird:

$$\hat{\beta}_{t,i} = \begin{cases} 0, & \text{falls } TA = 0 \\ \hat{\beta}_{t,i} \text{ aus (5b)}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

Das ist auch unmittelbar einsichtig: Die Geradensteigung $\hat{\beta}_{t,i}$ auf 0 zu setzen, bedeutet ja nichts anderes, als von vorneherein *festzulegen*, dass kein Trend vorliegen wird – gerade so, wie es klassische MAs implizit tun. Deutlich wird dies zudem an (4) i.V.m. (5a), denn da bei $\hat{\beta}_{t,i} = 0$ die entsprechenden Terme entfallen, gilt schlicht $\hat{k}_{t,i} = \hat{\alpha}_{t,i} = \bar{k}_{t,i} = SMA_i(t)$.

Nach dieser Vorarbeit wollen wir beide Formen eines TAMA nun anhand eines realen Beispiels überprüfen und vergleichen. Als, auch im Folgenden, durchgängiges Beispiel betrachten wir dafür das in Abbildung 1 gezeigte – den Dollarkurs von Anfang Mai bis Mitte Juni 2022 –, anhand dem das für herkömmliche MAs typische Trendproblem demonstriert worden ist. Dieser Kurs ist in Abbildung 4 nun noch einmal dargestellt, erneut mit einem SMA(10), diesmal aber auch mit dem bisher vorgestellten TAMA, einmal mit und einmal ohne Trendanpassung. So wird direkt deutlich, wie sich TAMAs zu dem aufgeworfenen Problem verhalten.

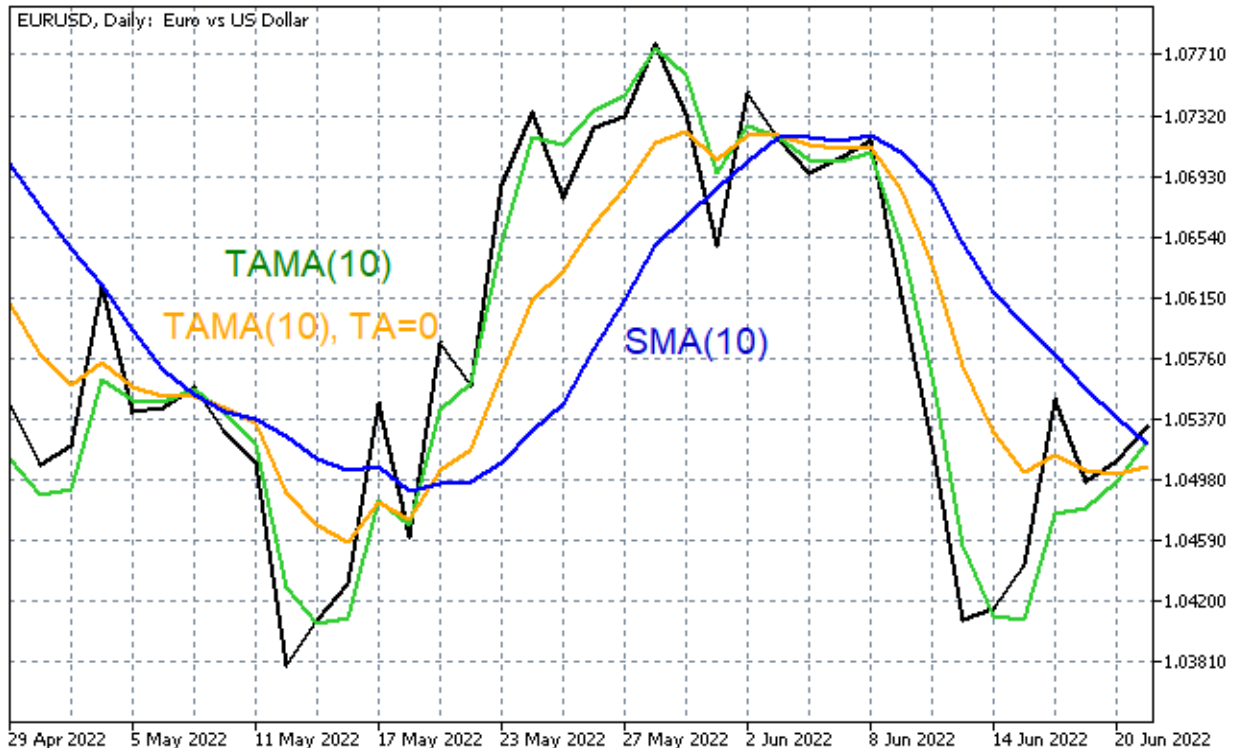


Abbildung 4: Abbildung 1 erweitert um den TAMA(10) mit und ohne Trendanpassung (TA).

Konzentrieren wir uns zunächst einmal auf den TAMA(10) ohne Trendanpassung (orange Linie). Auffällig daran ist, dass dieser nicht, wie man vielleicht erwarten hätte können, identisch mit dem SMA(10) (blaue Linie) ist. Stattdessen zeichnet bereits er ein viel besser geglättetes Bild des Kurses: Nicht nur liegt er praktisch zu jedem Zeitpunkt näher daran, er ist auch deutlich weniger verzögert! Die Erklärung dafür ist, dass der bislang vorgestellte grundlegende TAMA nicht dem trendangepassten Äquivalent des SMA entspricht, dem bereits erwähnten Tasma, sondern dem Harmonic TAMA (TAHMA), der auf einer der harmonischen Reihe folgenden Glättung basiert. Diese Zusammenhänge werden in Kapitel 4 noch expliziert.

Vorher wollen wir nun aber die grüne Linie betrachten, den eigentlichen TAMA(10). Dieser beweist eindrucksvoll, dass der verfolgte Ansatz hervorragend dazu geeignet ist, MAs um Trends anzupassen: Sowohl während des Aufwärts- als auch während des Abwärtstrends (ehemals rote Kreise in Abbildung 1) liegt er nicht nur ganz nahe am Kurs, wie er es sollte, sondern insb. auch nicht mehr *systematisch* darunter bzw. darüber – offenbar ist er tatsächlich auch während Trends erwartungstreu! Naturgemäß bedeutet das auch, dass er bei gleicher Periode etwas weniger stark glättet als die nicht trendangepassten MAs; es ist daher eine plausible Empfehlung, für TAMAs grundsätzlich etwas längere Periodendauern zu verwenden.

3.2 Prognose

Viele Prognosemodelle für die weitere Kursentwicklung basieren auf MAs. Natürlich kann damit auch ein TAMA als Input für ein solches Modell verwendet werden, und da er zusätzlich zu Mittelwerten auch deren Veränderungen in Trends berücksichtigt, wäre es nicht überraschend, wenn man dadurch bessere Vorhersagen erhielte.

Aufgrund der speziellen Berechnung von TAMAs – immerhin basieren sie auf Regressionsmodellen –, ist es außerdem (und im Unterschied zu herkömmlichen MAs) aber zumindest theoretisch möglich, sie auch eigenständig zur Prognose zu verwenden. Dazu ist lediglich eine weitere Erweiterung vonnöten: In (4) wurde der Kurs zum Zeitpunkt t , d.h. k_t , anhand des entsprechenden Punktes auf der i -ten Regressionsgeraden geschätzt, der sich gerade bei Index i fand. Das geschah allein zum Zweck der Glättung bzw. Mittelwertbildung, denn k_t ist zu (bzw. am Ende von) t ja bereits bekannt. Der Kurs eines folgenden Zeitpunkts $t + P$ ist dagegen noch unbekannt; freilich hindert aber nichts daran, ihn ebenfalls auf den Regressionsgeraden zu suchen, nur bei Index $i + P$ statt i .

Formal ist dazu ein weiterer Parameter einzuführen, hier als P (für „Prognose“) bezeichnet, der standardmäßig den Wert 0 besitzt. (4) ist dann wie folgt zu verändern:

$$\widehat{k}_{t_i} = \widehat{\alpha}_{t-P,i} + \widehat{\beta}_{t-P,i} \cdot (i + P) \quad (7)$$

Anschaulich bedeutet (7): Die i -te Schätzung \widehat{k}_{t_i} für k_t wird berechnet anhand der Datenlage zum Zeitpunkt $t - P$, und von dort aus dann um P Einheiten in die Zukunft extrapoliert. Entsprechend liefert ein so angepasster TAMA Werte nicht mehr nur bis t , sondern bis $t + P$, da ja genau bis zu $t = (t + P) - P$ Daten vorliegen. Für $P = 0$ fallen (7) und (4) zusammen.

P wurde hier zur größtmöglichen Flexibilität als beliebige⁵ Ganzzahl (Integer) modelliert. In der Praxis wird es aber i.d.R. kaum sinnvoll sein, den Kurs um mehr als eine Zeiteinheit extrapolieren zu wollen; außerdem nimmt mit steigendem Abstand zu den an t verfügbaren Daten natürlich auch der Schätzfehler zu. Zuallermeist wird P daher entweder den Standardwert 0 oder eben den Wert 1 aufweisen, sodass auch er effektiv als Schalter betrachtet werden kann.

⁵ Für manche Anwendungsfälle könnte evtl. sogar ein negatives P , also eine „Rückschau“ sinnvoll sein.

Abbildung 5 zeigt nochmals einen 10-periodigen TAMA für den Beispiel-Dollarkurs (blaue Linie, vgl. grüne Linie in Abbildung 4), diesmal allerdings mit $P = 1$ statt $P = 0$ – d.h., der Wert an t basiert nun nurmehr auf Daten bis zu $t - 1$. Entsprechend kann der TAMA jetzt auch bis $t + 1$ gezeichnet werden und sagt so den Kurswert des nächsten Tages vorher (Kreis).

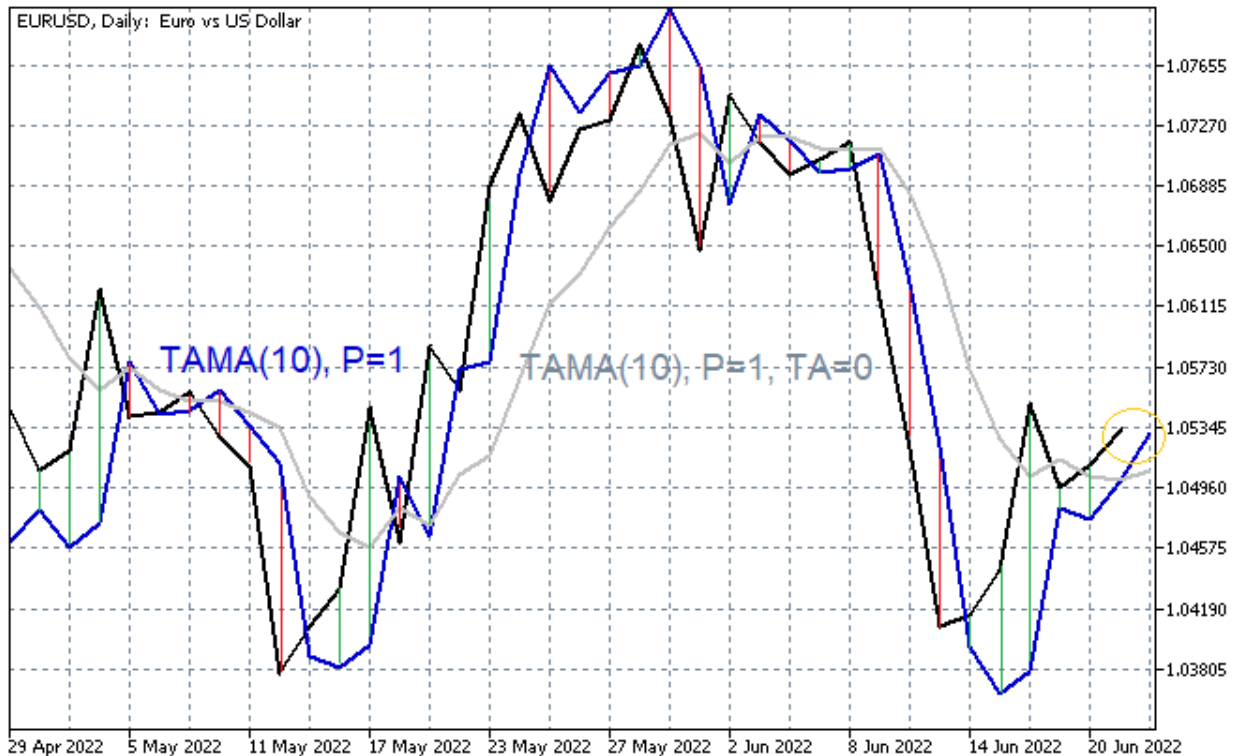


Abbildung 5: Kursprognose mittels eines TAMA(10) um $P=1$ Tag mit Abweichungen.

Wie gut ist diese Vorhersage? Um das zu evaluieren, sollte man sich zunächst einmal überlegen, was es bedeuten würde, den Kurs doch anhand von MAs ohne Adaption an einen Trend prognostizieren zu wollen: Schließt man einen solchen per Definition aus, so wäre die bestmögliche Prognose die triviale, d.h. man würde den Kurs an $t + 1$ gerade durch den Wert des MA an t schätzen – oder, anders ausgedrückt: den MA einfach um eine Einheit nach rechts verschieben! Das verdeutlicht die graue Linie in der Abbildung, bei der die Trendadaption mittels des Schalters $TA = 0$ deaktiviert wurde: Sie entspricht gerade der orangen Linie aus Abbildung 4, nur eben verschoben. Der Mehrwert der Trendadaption lässt sich so unmittelbar am Vergleich der blauen mit der grauen Linie ablesen: Erstere liegt meist, und v.a. natürlich während der Trends, viel näher am Kurs, entsprechend einer deutlich besseren Prognose. Das ist auch nicht allzu überraschend, da dedizierte Ansätze dazu ebenfalls oft auf Regressionen fußen.

Auch nur für sich selbst betrachtet kann man den prognostizierten Kurs als augenscheinlich angemessen bezeichnen. Er liegt i.d.R. nicht allzu weit von dem tatsächlichen (den man dann natürlich erst am jeweiligen Folgetag kennt) entfernt; an manchen Tagen wird letzterer fast genau getroffen (z.B. 09.05.), an anderen (logischerweise v.a. an solchen, an denen er sich sehr stark verändert) fällt die Abweichung größer aus (z.B. 12.05.). Über- und Unterschätzungen (rote bzw. grüne Linien) halten sich in etwa die Waage, wobei erstere aufgrund der MA-Basis natürlich häufiger während Abwärtstrends vorkommen als letztere und umgekehrt.⁶

Trotz dieser Eigenschaften sollten TAMAs wahrscheinlich nicht als alleiniges Prognosemodell verwendet werden; zwar können sie Mittelwerte und v.a. deren Veränderungen gut erfassen, es fehlt aber eine Komponente, die die Streuung um diese herum abbildet. Diese Lücke kann allerdings gefüllt werden; entweder durch geeignete Kombination mit „Streuungsindikatoren“ wie z.B. dem Stochastic Oscillator oder durch die Bildung und Verwendungen von Bändern, d.h. Intervall- statt Punktschätzern. Letzterer Ansatz wird nachfolgend thematisiert.

3.3 Bänder

Neben Prognosemodellen basieren auch Bänder-Indikatoren oftmals auf MAs; das prägnanteste Beispiel dafür, die Bollinger-Bänder, wurde bereits erwähnt. Entsprechend können TAMAs auch für solche anstelle ihrer nicht trendangepassten Pendanten als Input verwendet werden. Daraus ergibt sich ein großer Vorteil: Die erzeugten Bänder werden so um einen *immer* unverzerrten Mittelwert herum gelegt, sodass ihre Interpretation nicht mehr davon abhängen muss, ob man sich gerade in einem Trend befindet oder nicht (zumal dies ja nur selten eindeutig zu sagen ist)!

Tatsächlich lässt sich aus der Berechnung eines TAMA, erneut im Gegensatz zu herkömmlichen MAs, durch die nächste Erweiterung aber auch ein ganz eigener Bänder-Indikator ableiten. In (3) wurden nämlich die n Schätzwerte \hat{k}_{t_i} für den Kurs k_t zum Zeitpunkt t dadurch zu einem Gesamtschätzwert verdichtet, dass ihr arithmetisches Mittel gebildet wurde. Das ist zwar die naheliegendste, keineswegs aber die einzig mögliche Aggregationsmöglichkeit. Die rechte Seite von (3) kann daher durch eine flexible Aggregationsfunktion AF ersetzt werden:

$$TAMA_n(t) = AF(\hat{k}_{t_1}, \dots, \hat{k}_{t_n}) \quad (8)$$

⁶ Diese Beobachtung regt zu der Frage an, ob man auch bzgl. des Prognosewertes (statt bzgl. des Kurswertes) eine Trendadaption vornehmen könnte, sozusagen eine Trendadaption „zweiter Ordnung“, ähnlich dazu, einen MA auf sich selbst anzuwenden. Vermutlich ist dies nicht möglich bzw. sinnvoll, da im Vorhersageszenario eben der entscheidende Wert k_t fehlt bzw. bereits geschätzt worden ist, aber dies ist Gegenstand weiterer Forschung.

Standardmäßig soll AF weiterhin dem arithmetischen Mittel entsprechen – (8) also (3) –, aber gerade zur Bildung von Bändern (sicherlich gibt es noch weitere Anwendungsmöglichkeiten) stellen v.a. auch Quantil-basierte Aggregationsfunktionen eine sinnvolle Alternative dar. So könnte ein Kurs z.B. durch ein 20%-Quantil-Band, ein 80%-Quantil-Band und ggf. den Median (d.h. dem 50%-Quantil-Band) der Schätzwerte \hat{k}_{t_i} beschrieben und analysiert werden.

Eine besondere Rolle nehmen dabei die beiden extremen Bänder ein, d.h. Minimum und Maximum der Schätzungen ($AF = \min_i \hat{k}_{t_i}$ bzw. $AF = \max_i \hat{k}_{t_i}$). Werden sie auf den Kurs angewandt, ergeben sich zwei Bänder, die ihn einhüllen, d.h. niemals schneiden (Abbildung 6).

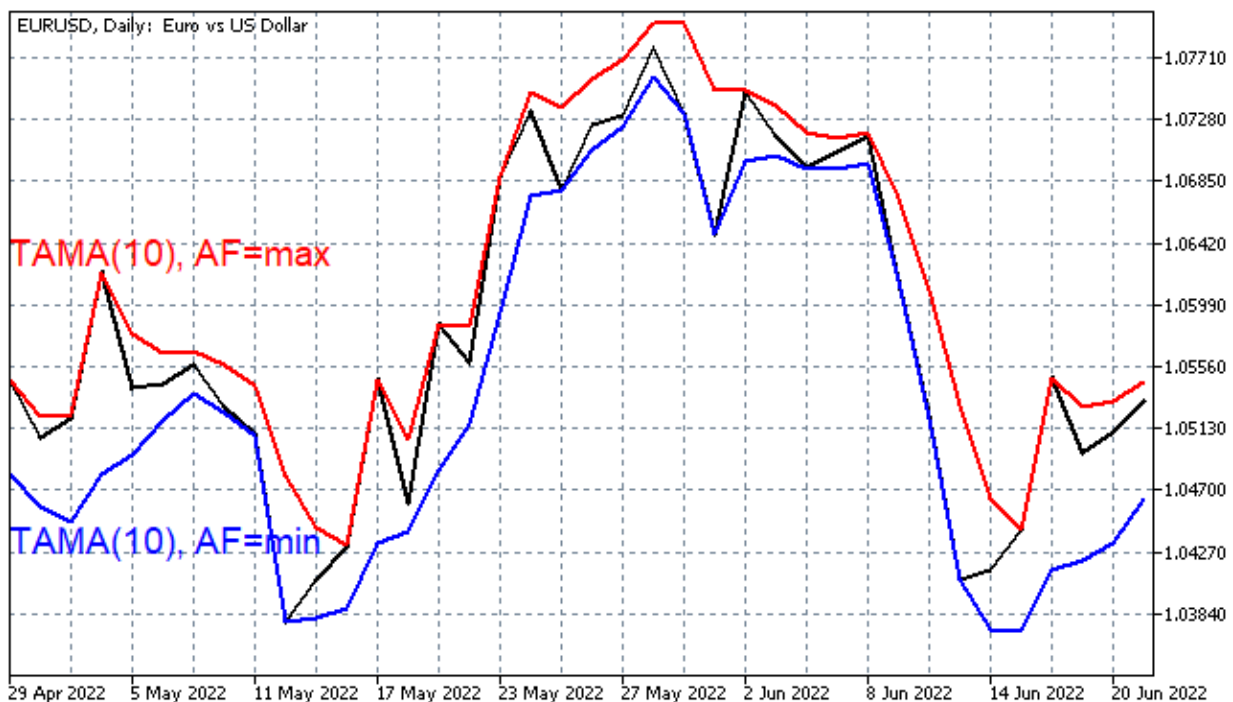


Abbildung 6: Min-Max-Bänder (AF) des TAMA(10) um einen Kurs.

Das mag nun vielleicht noch nicht so spannend klingen, öffnet aber die Tür für zwei interessante neue Auswertungsmöglichkeiten. Die erste besteht in der Beobachtung, dass der Kurs fast immer näher an einem Band liegt als am anderen (in Aufwärtstrends näher am oberen, in Abwärtstrends näher am unteren, was angesichts der Berechnungsformel nicht überrascht) und dieses oft – aber nicht immer (z.B. 09.05., 30.05.) – exakt trifft. Es ist daher zu vermuten, dass sein Abstand zu den Bändern eine Information darstellt, die sich zur Bestimmung der Trendsteigung ausnutzen lässt; diese wäre umso größer (kleiner), je näher er am oberen (unteren) Band liegt.

Noch interessanter erscheint aber die zweite Auswertungs-idee: Wenn Minimum und Maximum der Schätzwerte für den Kurs diesen unter Kenntnis von k_t vollständig einhüllen, welche Bedeutung hat dann das Durchstoßen dieser Hülle, wenn k_t stattdessen prognostiziert wird? Immerhin bedeutet ein solches inhaltlich ja, dass der Kurs sogar die kleinst- bzw. größtmögliche zu erwartende Fortschreibung seines aktuellen Verlaufs unter- bzw. überschreitet; dies sollte ein starkes Signal dafür sein, dass sich etwas ändern wird.

Abbildung 7 zeigt zur Überprüfung dessen noch einmal den TAMA(10) mit den entsprechenden Aggregationsfunktionen, diesmal allerdings auf Prognosebasis, d.h. mit $P = 1$. Tatsächlich liegen nun an mehreren Stellen Durchbrüche der Hülle vor. Die meisten davon sind nachgelagert in dem Sinne, dass mehrmals hintereinander immer wieder dasselbe Band durchstoßen wird. Solches wäre ggf. als eine sich ändernde oder (wahrscheinlicher) sich noch nicht eingependelt habende (geschätzte) Steigung zu interpretieren. Bedeutsamer ist aber der Blick auf die jeweils *ersten* Durchbruchpunkte eines Bandes nach einem Durchbruchpunkt des anderen (in der Abbildung grün bzw. orange dargestellt). Würde man diese im Beispiel der Abbildung als Kauf- bzw. Verkaufssignale interpretieren, so hätte man, abgesehen vom allerersten Fall, bei dem sich ein scheinbarer Aufwärtstrend nicht realisiert, gut gehandelt: Der große Aufwärtstrend Mitte Mai wird sehr zeitnah erkannt und genau wieder verlassen als sich ein Plateau einstellt; ein weiteres Kaufsignal erfolgt dann erst Mitte Juni, nachdem der große Abwärtstrend vorüber ist.

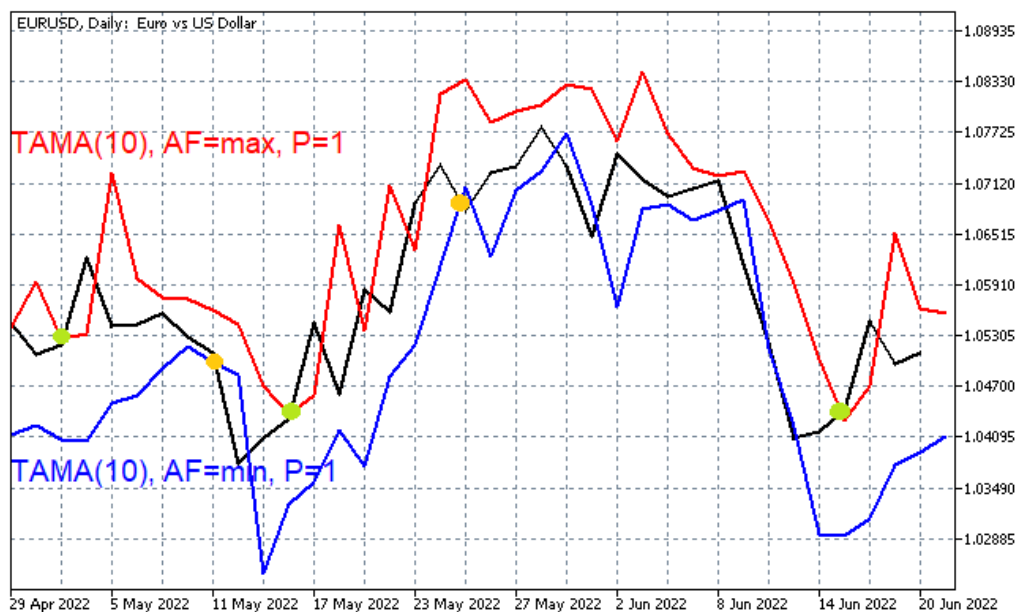


Abbildung 7: Abbildung 6 auf Prognosebasis ($P = 1$) mit jeweils ersten Durchbruchpunkten.

4. Trend-Adaption klassischer MAs

Obwohl es aus illustrativen Gründen bisher teils jenen Anschein gehabt haben mag, ist „TAMA“ kein einzelner neuer Indikator, sondern viel eher ein Verfahren, mit dem (nahezu) *jeder beliebige* MA so verändert werden kann, dass er sich Trends anpasst; die zusätzlichen Möglichkeiten zur Prognose und Bänderbildung sind ein Addendum dazu. In diesem Kapitel wird nun zunächst allgemein hergeleitet, wie die Anpassung funktioniert, und diese dann für die „üblichen“ MAs sowie einen unbekannteren MA mit besonderem TAMA-Bezug konkretisiert.

4.1 Herleitung des allgemeinen Verfahrens

Um der TAMA-Berechnung genügend Flexibilität zu verleihen, fast beliebige MA umfassen zu können, ist eine letzte und die wohl wichtigste Erweiterung notwendig: Es wurde bei der Einführung der Aggregationsfunktion AF aus (8) bereits festgehalten, dass die Verdichtung der Schätzwerte \widehat{k}_{t_i} für den Kurs k_t am Zeitpunkt t nicht notwendigerweise durch das arithmetische Mittel geschehen muss. Ebenso ist es aber nicht notwendig, dass k_t nur von diesen abhängen darf, und auch nicht, dass diese Abhängigkeiten alle gleichwichtig bzw. gleichgewichtig sein müssen (es könnte, anschaulich interpretiert, ja z.B. sein, dass wir dem Schätzwert, der auf allen n Kurswerten des Fensters basiert, eine höhere Bedeutung zuweisen wollen als dem ersten, der nur auf dem aktuellen Kurs basiert). Wir führen daher Gewichte w_i sowie eine von den \widehat{k}_{t_i} unabhängige Restgröße $r(t)$ ein und erweitern (8) wie folgt:

$$TAMA_n(t) = AF(w_1 \cdot \widehat{k}_{t_1}, \dots, w_n \cdot \widehat{k}_{t_n}) + r(t) \quad (9)$$

Diese Änderungen sind von großer Bedeutung, da sich fast jeder (x-)beliebige MA, im Folgenden pauschal als XMA bezeichnet, als gewichtete Summe der n Kurswerte plus Restgröße $s(t)$, auf die später noch ausführlicher eingegangen wird, darstellen lässt.⁷ Es gilt also:

$$XMA_n(t) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot k_{t-i+1} + s(t) \quad (10)$$

wobei u_i das Gewicht (das natürlich auch den Wert 0 haben kann) des Kurswertes k_{t-i+1} ist.⁸

⁷ Die Ausnahme bilden „exotische“ MAs, die *in den Kurswerten* nichtlinear sind, etwa der Geometric Moving Average $GMA_n(t) = \sqrt[n]{k_t \cdot k_{t-1} \cdot \dots \cdot k_{t-n+1}}$. Viele Mitglieder dieser Gruppe lassen sich jedoch linearisieren.

⁸ Zur Vereinfachung der Notation wird auf eine Normalisierung der Gewichte (z.B. zur Summe 1) verzichtet.

Nun stehen in (9) Schätzwerte $\widehat{k}_{t,i}$, die sich zudem alle auf denselben Kurs k_t beziehen, in (10) aber verschiedene tatsächliche Kurswerte k_{t-i+1} . Um den fiktiven XMA zu einem TAMA zu machen, dem fiktiven TAXMA, muss als nächstes beides vergleichbar gemacht werden. Dazu sind einige wesentliche Einsichten vonnöten:

1. Wenn der TAXMA die trendadaptive Version des XMA sein soll, so muss er für *alle beliebigen Kurswerte und Zeitpunkte* mit letzterem übereinstimmen, wenn seine Trendadaption ausgeschaltet, d.h. $TA = 0$ gesetzt wird.
2. Dies ist nur für Aggregationsfunktionen AF möglich, die dieselbe grundsätzliche Struktur wie der XMA aufweisen, also lineare Summen darstellen. Zudem unterscheiden sich die so zulässigen Funktionen höchstens in einer multiplikativen Konstante, die durch andere Wahl der Gewichte w_i aufgelöst werden kann. Als Normierung kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit das gewichtete arithmetische Mittel für AF gewählt werden.
3. Da der XMA als klassischer MA nur abbildet, nicht prognostiziert, ist $P = 0$.

Mit diesen Konstruktionen können wir (9) nun Schritt für Schritt umformen:

$$\begin{aligned}
TAXMA_n(t) - r(t) &= AF(w_1 \cdot \widehat{k}_{t_1}, \dots, w_n \cdot \widehat{k}_{t_n}) \stackrel{AF}{\cong} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot \widehat{k}_{t_i} \\
&\stackrel{(7)}{\cong} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot \left(\widehat{\alpha}_{t-P,i} + \widehat{\beta}_{t-P,i} \cdot (i+P) \right) \stackrel{TA=0,(6)}{\cong} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot \widehat{\alpha}_{t-P,i} \stackrel{P=0}{\cong} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot \widehat{\alpha}_{t,i} \\
&\stackrel{(6)}{\cong} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot \left(\bar{k}_{t,i} - \widehat{\beta}_{t,i} \cdot \frac{i+1}{2} \right) \stackrel{TA=0,(6)}{\cong} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{k}_{t,i} \stackrel{(2)}{\cong} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot \frac{1}{i} \cdot \sum_{j=1}^i k_{t-j+1} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{w_1}{1} \cdot (k_t) + \frac{w_2}{2} \cdot (k_t + k_{t-1}) + \dots + \frac{w_n}{n} \cdot (k_t + k_{t-1} + \dots + k_{t-n+1}) \right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{w_1}{1} + \frac{w_2}{2} + \dots + \frac{w_n}{n} \right) \cdot k_t + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{w_2}{2} + \dots + \frac{w_n}{n} \right) \cdot k_{t-1} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{w_n}{n} \cdot k_{t-n+1} \\
&\stackrel{!(10)}{\cong} u_1 \cdot k_t + u_2 \cdot k_{t-1} + \dots + u_n \cdot k_{t-n+1} = XMA_n(t) - s(t)
\end{aligned} \tag{11}$$

Um die geforderte Gleichheit der letzten beiden Zeilen *unabhängig von konkreten Kurswerten* herzustellen, ist ein Koeffizientenvergleich anzuwenden. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit $n + 1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{w_1}{1} + \frac{w_2}{2} + \dots + \frac{w_n}{n} \right) \\
 u_2 &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{w_2}{2} + \dots + \frac{w_n}{n} \right) \\
 &\vdots \\
 u_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{w_n}{n} \right) \\
 s(t) &= r(t)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Dieses kann schließlich leicht nach den w_i aufgelöst werden, indem für alle $i < n$ die Differenzen $u_i - u_{i+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{w_i}{i}$ gebildet werden. Es ergibt sich:

$$w_i = \begin{cases} n \cdot i \cdot (u_i - u_{i+1}), & \text{falls } i < n \\ n^2 \cdot u_n, & \text{falls } i = n \end{cases} \tag{13}$$

Damit ist ein recht einfacher Zusammenhang gefunden, der es erlaubt, aus der Kenntnis der Formel eines MA die Gewichte des korrespondierenden TAMA mit deaktivierter Trendanpassung zu berechnen. Mit deren „Wiedereinschalten“ durch $TA = 1$ ist dessen Konstruktion abgeschlossen.

4.2 Der Harmonic MA (HMA) als Pendant des einfachsten TAMA

Bevor wir anhand von (13) die trendadaptierten Versionen bekannter MAs herleiten, können wir zunächst umgekehrt untersuchen, ob der eingangs vorgestellte „Grund-TAMA“ einem davon entspricht. Für diesen war bis zur Erweiterung durch flexible Gewichte w_i in (9) implizit $w_i = 1$ für alle i sowie $r(t) = 0$ angenommen worden. Setzt man dieses in (11) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 TAMA_n^{w_i=1}(t) &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} \right) \cdot k_t + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \cdot k_{t-1} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right) \cdot k_{t-n+1} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (H_n - H_{i-1}) \cdot k_{t-i+1}
 \end{aligned} \tag{14}$$

wobei $H_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}$ die i -te sog. harmonische Zahl bezeichnet, also die i -te Partialsumme der harmonischen Reihe (außerdem werde aus Notationsgründen $H_0 = 0$ definiert). Der entsprechende MA könnte daher Harmonic MA (HMA) genannt werden,⁹ und der grundlegende TAMA TAHMA.¹⁰ Dieser Zusammenhang erscheint zunächst überraschend; man hätte, wie oben schon erwähnt, wahrscheinlich eher mit dem SMA als dessen Pendant gerechnet. Bei genauerem Hinsehen erklärt es sich wie folgt: Der TAMA ist nach Konstruktion ein Durchschnitt von Regressionsschätzwerten, diese sind, zumindest für $TA = 0$, ebenfalls Durchschnitte, und die Basis der Regressionen sind gerade $i = 1, 2, \dots, n$ Punkte. Ein *konsekutiver Durchschnitt von Durchschnitten* entspricht aber gerade dem Wesen der harmonischen Reihe. So wird auch deutlich, warum der HMA anscheinend so hervorragende Glättungseigenschaften zeigt (vgl. Kapitel 3.1). Es wäre daher anzuregen, ihn auch außerhalb der TAMA-Thematik weiter zu untersuchen.

4.3 Konkretisierungen für bekannte MAs

Simple Moving Average (SMA)

Nachdem nun gezeigt wurde, dass der einfachste TAMA mit dem HMA und nicht mit dem SMA korrespondiert, stellt sich die Frage, wie das TAMA-Pendant zu letzterem stattdessen aussieht. Nach (1), worin implizit die Gewichte $u_i = \frac{1}{n}$ sowie $r(t) = 0$ stehen, muss für dieses i.V.m. (13)

$$w_i^{SMA} = \begin{cases} n \cdot i \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right), & \text{falls } i < n \\ n^2 \cdot \frac{1}{n}, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i < n \\ n, & \text{falls } i = n \end{cases} \quad (15)$$

gelten. Anschaulich bedeutet das, dass alle anderen Regressionen außer derjenigen, die die meisten Punkte umfasst (nämlich alle n bis zum Beginn des Periodenfensters), aus der Berechnung herausfallen. Der so entstehende TAMA, der TASMA, basiert somit nur auf dieser einen Regression, was ihn anfällig gegenüber der Wahl von n macht. Dieses Problem wurde bei der Herleitung der TAMA-Idee in Kapitel 2.2 ausführlicher diskutiert.

⁹ Unter dieser Bezeichnung findet man, insb. auf Handelsplattformen, manchmal bereits MAs, die allerdings in den Kurswerten statt in den Koeffizienten harmonisch (und damit im o.g. Sinne „exotisch“) sind (z.B. gorx1 2020); damit sollte der hier vorgestellte HMA nicht verwechselt werden.

¹⁰ Generell sollte, wie auch schon im Laufe der Arbeit geschehen, jeweils Bezeichnungen der Form TA<...>MA (hier TASMA) gegenüber solchen der Form <...>TAMA (hier STAMA) Vorrang gegeben werden, um auszudrücken, dass es sich nicht um Arten eines TAMA-Indikators handelt, sondern um „TA“-Versionen bestehender MAs.

Weighted Moving Average (WMA)

Der Weighted MA (WMA) basiert auf der Idee, dem $i - 1$ Tage vom aktuellen Kurs k_t entfernten Kurs k_{t-i+1} das Gewicht $u_i = \frac{n-i+1}{N}$ zuzuweisen, damit ältere Einflüsse gegenüber jüngeren linear an Bedeutung verlieren. $N = n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{n^2+n}{2}$ ist dabei ein Normalisierungsfaktor. Nach (13) ergeben sich die Gewichte des TAWMA wie folgt:

$$w_i^{WMA} = \begin{cases} n \cdot i \cdot \left(\frac{n-i+1}{N} - \frac{n-(i+1)+1}{N} \right), & \text{falls } i < n \\ n^2 \cdot \frac{1}{N}, & \text{falls } i = n \end{cases} = \frac{2 \cdot i}{n+1} \quad (16)$$

Ähnlich wie der SMA, stellt auch der WMA in einem Sinn einen interessanten Spezialfall dar, da die sonst in (13) nötige Fallunterscheidung bei ihm aufgrund der arithmetischen Progression seiner Gewichte, wie in (16) gezeigt, gerade wegfällt.

Exponential Moving Average (EMA)

Der Exponential MA (EMA) führt die Idee des WMA fort: Auch er gewichtet Kurse schwächer, die weiter zurückliegen, jedoch nicht mehr arithmetisch, sondern exponentiell progressiv:¹¹

$$\begin{aligned} EMA_{n,\alpha}(t) &= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1-\alpha)^{i-1} \cdot k_{t-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha \cdot (1-\alpha)^{i-1} \cdot k_{t-i+1} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{i-1} \cdot k_{t-i+1}}_{r(t)} \end{aligned} \quad (17)$$

mit dem Glättungsfaktor $0 < \alpha < 1$, der üblicher- aber nicht notwendigerweise als $\alpha = \frac{2}{n+1}$ gewählt wird. Dementsprechend werden die Gewichte zwar immer kleiner, erreichen in der Theorie aber nie den Wert 0 und fallen damit auch nicht weg.¹² Das scheint auf den ersten Blick ein Problem zu sein, denn bislang war immer nur eine gewichtete Summe der genau n im aktuellen Periodenfenster liegenden Kurse zugelassen worden. Zerlegt man die Berechnungsformel aber wie in (17) gezeigt entsprechend, so erkennt man, dass sich dieses Problem leicht auflöst: Alle anderen

¹¹ (17) ist äquivalent zur bekannteren rekursiven Darstellung $EMA_n(t) = \alpha \cdot k_t + (1-\alpha) \cdot EMA_n(t-1)$.

¹² In der Praxis gibt es zwei unterschiedliche Methoden, wie Trading-Programme damit umgehen. Die im Folgenden behandelte ist, den EMA tatsächlich bis zum allerersten verfügbaren Datenpunkt zu berechnen. Alternativ kann die Berechnung bereits nach genau n Schritten abgebrochen werden; in dem Fall muss zunächst der Koeffizient des n -ten Kurses k_{t-n+1} um den Faktor $1/\alpha$ korrigiert werden. Danach kann analog zum WMA verfahren werden.

Summanden für $i \geq n$ inkl. deren Koeffizienten fließen nicht in die Gewichte w_i ein, sondern werden stattdessen über die Restgröße $r(t)$ abgebildet; diese muss zwar konstant bzgl. der Kurse im Fenster sein, nicht aber bezüglich der anderen. Somit können die w_i wie gehabt über (13) bestimmt werden:

$$w_i^{EMA} = \begin{cases} n \cdot i \cdot (\alpha \cdot (1 - \alpha)^{i-1} - \alpha \cdot (1 - \alpha)^i), & \text{falls } i < n \\ n^2 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha)^{i-1}, & \text{falls } i = n \end{cases} \quad (18)$$

$$= n \cdot i \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha)^{i-1} \cdot \begin{cases} \alpha, & \text{falls } i < n \\ 1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

4.4 Vergleich wichtiger TAMAs

Nachdem die trendadaptierten Versionen der drei wichtigsten MAs abgeleitet sowie mit dem TAHMA eine typische Ausprägung präsentiert wurden, sollen diese TAMAs nun einmal miteinander verglichen werden. Ohne Trendanpassung ist vielfach bestätigt worden (vgl. z.B. Zinovik 2017), dass sich verschiedene MAs nur geringfügig voneinander unterscheiden; es ist nun fraglich, ob sich dieses Ergebnis auch mit Trendanpassung wiederfindet.

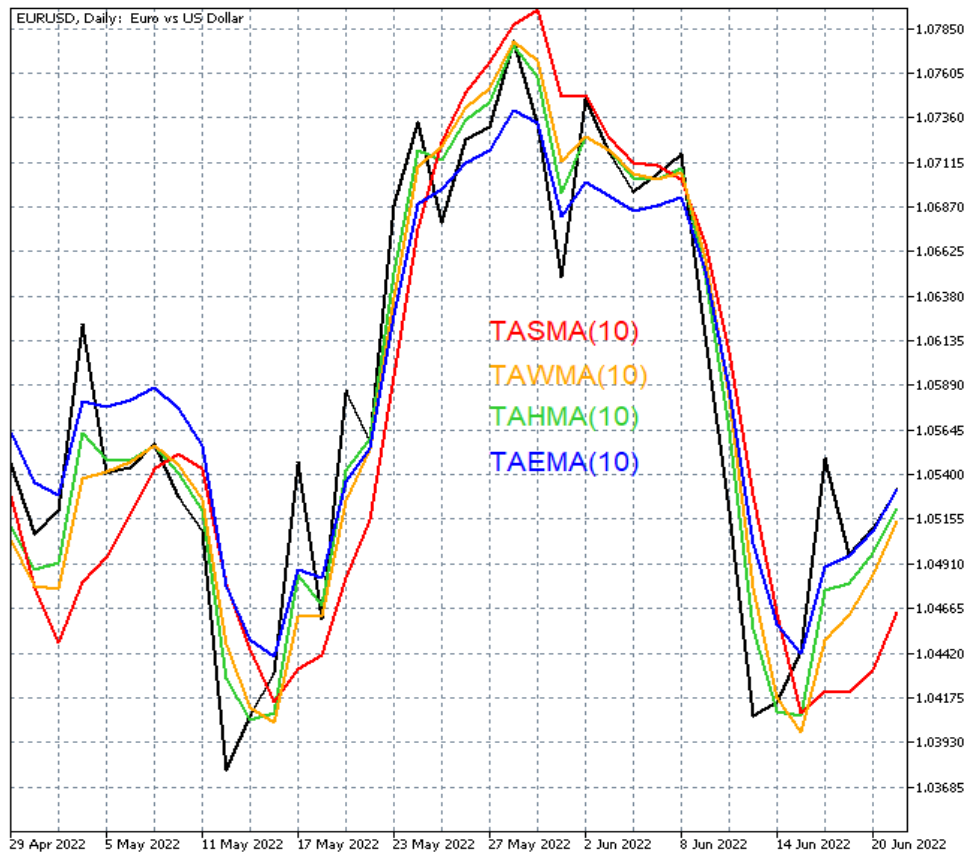


Abbildung 8: Die wichtigsten TAMAs im Vergleich.

Wie Abbildung 8 verdeutlicht, scheint dies der Fall zu sein: Zu allen gezeigten Zeitpunkten weichen die einzelnen TAMAs nur marginal voneinander ab. Interessanterweise scheint die Abweichung größer zu sein, wenn *kein* Trend vorliegt; das wäre plausibel, da die Trendkomponente aus (6) nicht von den variierenden Gewichten w_i abhängt, also einen harmonisierenden Faktor darstellt. Möglicherweise könnte diese Idee auch genutzt werden, um aus den Variantendifferenzen ein Indiz für das Vorliegen eines Trends zu gewinnen.

Diese Differenzen sind für den TAWMA, den TAHMA und den TAEMA augenscheinlich nicht systematisch: Mal liegt eine Variante über den anderen, mal andersherum. Für den TASMA gilt dies jedoch nicht: Er liegt, bezogen auf den Kurs, systematisch weiter davon entfernt als die anderen TAMAs. Unzweifelhaft hängt dies damit zusammen, dass er, wie oben festgehalten wurde, „effektiv“ nur auf einer einzelnen Regression basiert und sich daher nicht so gut an Trends anpasst wie die anderen Varianten. Er ist daher mehr von theoretischem Interesse.

Insgesamt lässt sich jedoch festhalten, dass, vom TASMA abgesehen, die Unterschiede zwischen verschiedenen TAMAs i.d.R. nicht bedeutender sein werden als die zwischen ihren jeweiligen MA-Pendants. Im Folgenden wird daher nur noch jeweils ein TAMA betrachtet.

5. Praktische Anwendung

Die Vorstellung des TAMA-Verfahrens ist damit abgeschlossen. Was verbleibt, ist demonstrativ zu zeigen, wie es sich in der Praxis bewährt. Zwar wurden bei der Betrachtung der einzelnen Szenarien in Kapitel 3 bereits einige realitätsnahe Auswertungen durchgeführt, das jedoch nur anhand eines einzelnen instruktiven Beispiels. In diesem Kapitel sollen TAMAs daher noch einmal in größerem Maßstab evaluiert werden. Der Fokus liegt dabei nicht auf dem Vergleich mit anderen Indikatoren o.Ä., sondern v.a. darauf, was bzw. wie viel die entwickelte Trendadaption ausmacht, d.h. auf dem Vergleich mit den nicht trendangepassten, heute üblichen MAs.

5.1 Glättung

Wie eingangs erwähnt, dürfte Glättung die wohl wichtigste Aufgabe von MAs sein. Doch was genau soll „glatt“ bedeuten, und wie erstrebenswert ist mehr Glätte, wenn der Kurs dafür weniger genau abgebildet wird? Dies wären keineswegs einfach zu beantwortende Fragen – tatsächlich füllen sie ganze Studien, auch im Trading-Bereich (Raudys und Pabarskaite 2016) –, sodass sich eine quantitative Untersuchung hier äußerst schwierig gestalten würde.

Glücklicherweise ist eine solche im Fall von TAMAs aber gar nicht notwendig, denn, wie auch immer man Glätte exakt definieren und gegenüber Genauigkeit abwägen möchte, ist es in jedem Fall vorzuziehen, wenn letztere gegeben ersterer nicht davon abhängt, ob sich der Kurs „zufällig“ gerade in einem Trend befindet oder nicht. Da nun klassische MAs bekanntlich diese Schwäche aufweisen, TAMAs wie gezeigt aber nicht mehr, dürfte es offensichtlich sein, dass letztere erstere in jeder quantitativen Untersuchung zur Glättung dominieren werden.

Es genügt hier daher eine weitere qualitative Untersuchung, und zwar eine, die – nachdem bislang ausschließlich 10-periodige und damit kurzfristige TAMAs betrachtet wurden – zeigt, dass auch mittel- und langfristige TAMAs ihre Vorzüge behalten. Dazu ist in Abbildung 9 einmal wieder der Dollarkurs dargestellt, diesmal allerdings über einen langen Zeitraum von ca. vier Jahren. Um ihn zu glätten, wurden zwei EMAs verwendet, mit Periodeneinstellungen von $n = 50$ bzw. $n = 200$, jeweils einmal ohne und einmal mit Trendadaption (d.h. als TAEMA).

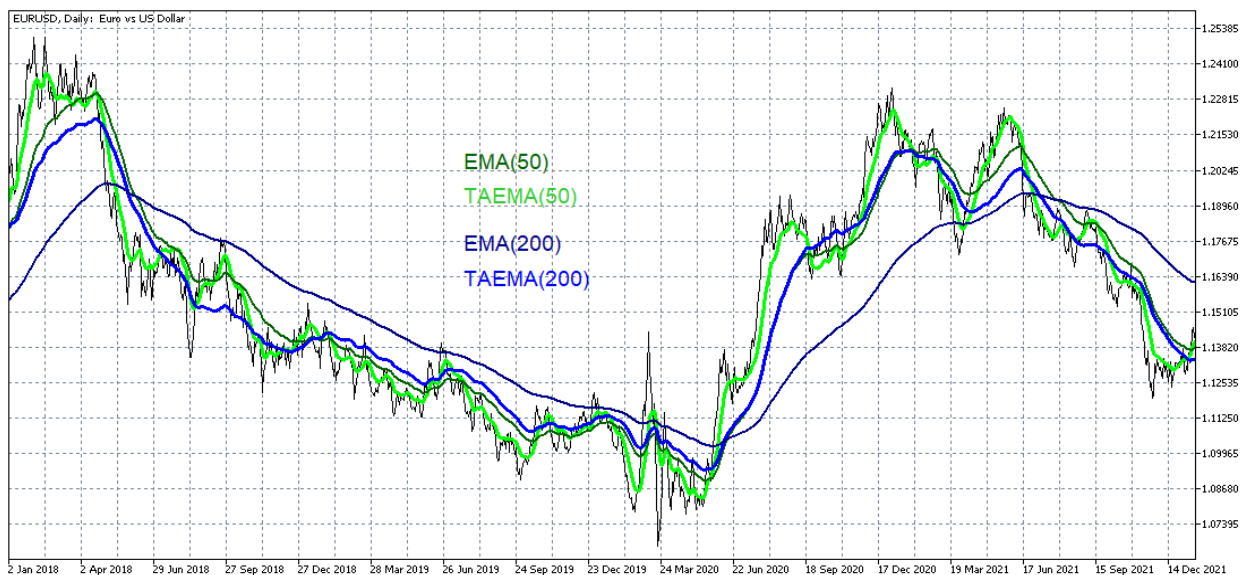


Abbildung 9: Glättung mit und ohne Trendanpassung für mittelfristige und langfristige Perioden.

Das Ergebnis fällt wie erwartet eindeutig aus: Die beiden TAEMAs bilden den Kurs während aller Phasen hervorragend und – in Anbetracht ihrer Perioden – fast verzögerungsfrei ab. Die beiden klassischen EMAs können damit nicht konkurrieren: Der EMA(200) liegt während der großen Trends gänzlich fernab vom Kurs, und der EMA(50) liegt zwar näher daran, ist aber gar eher dem TAEMA(200) als dem TAEMA(50) ähnlich! Der einzige Vorteil der klassischen EMAs, die schon bemerkte leicht bessere Glättung bei gleicher Periodendauer, kann so ohne Weiteres durch Wahl einer etwas größeren Periode für die TAMAs mehr als kompensiert werden.

5.2 Prognose

In Kapitel 3.2 wurde qualitativ für ein konkretes Beispiel gezeigt, wie die lineare Regressionskomponente, auf der TAMAs basieren, die Kursprognose verbessert. Um die Stärke dieses Effekts abzuschätzen, wurde nach demselben Vorgehen auch eine quantitative Auswertung durchgeführt, und zwar für die 40 DAX-Mitglieder in einem 1-Jahres-Zeitraum (01.07.2021–30.06.2022). Dazu wurde auf (TA)EMA(20)-Basis für jeden dieser Kurse der Root Mean Square Error (RMSE) der Prognose berechnet, der (im Prinzip) die durchschnittliche Größe eines Schätzresiduums (vgl. Abbildung 5) unabhängig von dessen Richtung misst.

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse (Spalten 2–4). Diese waren ihrem Prinzip nach erwartbar: Der Schätzfehler fällt für jeden einzelnen Kurs niedriger aus, wenn die Trendadaption aktiviert ist, da dadurch zusätzliche Informationen – nämlich die über Trends – verwendbar gemacht werden. Überraschend ist allerdings das Ausmaß dieses Effekts: Der RMSE liegt für TAMAs im Durchschnitt um fast 1/3 (31,97%) niedriger als für ihre klassischen Pendant!

5.3 Bänder

Bänder um den Kurs können ebenfalls als Prognosen interpretiert werden, wenn auch als Intervallprognosen. Die schon erwähnten Bollinger-Bänder werden bekanntlich z.B. dadurch konstruiert, dass (in der Standardeinstellung) um einen 20-periodigen SMA herum ein symmetrischer Kanal der Größe $2 \cdot 2 \cdot \sigma$ gelegt wird, wobei σ die Standardabweichung der Kurse im aktuellen Fenster bezeichnet (für Details siehe Bollinger 2001). Dann wird von vielen Anlegern unter einigen Annahmen unterstellt, dass der Kurs der folgenden Zeiteinheit mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% in diesem Kanal liegen müsse.

Das ist freilich nicht der Fall, weil keine dieser Annahmen tatsächlich erfüllt ist. Nichtsdestotrotz *gibt* es aber eine Wahrscheinlichkeit, mit der das Erwartete passieren wird, sie beträgt nur nicht notwendigerweise 95%. Ihr tatsächlicher Wert kann durch Backtesting gut geschätzt werden; in unserer Untersuchung liegt er im Durchschnitt bei etwa 82% (Spalte 5 von Tabelle 1). Allerdings nur, solange tatsächlich ein SMA verwendet wird. Wird stattdessen dessen trendangepasste Version verwendet, also der TASMA, steigt die Wahrscheinlichkeit auf über 90% (Spalte 6, mit dem TAEMA wäre es gar noch mehr) – und das *bei gleicher Kanalgröße!* Das zeigt noch einmal sehr anschaulich, wie das TAMA-Verfahren bestehende Indikatoren verbessern kann.

Neben den Bollinger-Bändern wurden auch die in Abbildung 7 vorgestellten, TAMA-spezifischen, derselben Auswertung unterzogen. Für sie ist die Trefferwahrscheinlichkeit zwar geringer (Spalte 8) – im Schnitt liegen 3 von 4 Kursen in ihrem Kanal. Jedoch ist dieser dabei deutlich enger (Spalte 9): statt 2 Standardabweichungen benötigt er nur ca. 0,8. Die TAMA-Bänder (hier auf HMA-Basis) könnten daher für manche Anwendungen eine gute Alternative sein.

Kurs (1.7.21-30.6.22)	rmse_ta0	rmse_ta1	-%	boll_ta0	boll_ta1	boll_sig	mima	mima_sig
adidas	130,12	88,78	31,77%	81,36%	93,22%	2	76,17%	0,77
Airbus	58,39	44,30	24,14%	84,75%	87,71%	2	73,19%	0,92
Allianz	90,35	61,39	32,05%	81,78%	91,95%	2	75,74%	0,78
BASF	32,71	20,30	37,94%	81,36%	89,41%	2	77,45%	0,82
Bayer	27,75	16,34	41,11%	80,08%	91,95%	2	71,06%	0,72
Beiersdorf	34,29	26,03	24,10%	86,86%	86,44%	2	74,89%	0,93
BMW	45,34	31,16	31,27%	84,75%	91,95%	2	74,89%	0,83
Brenntag	30,42	22,14	27,23%	84,32%	89,41%	2	73,62%	0,90
Continental	65,30	42,88	34,33%	78,81%	89,83%	2	78,30%	0,79
Covestro	29,49	19,75	33,02%	78,81%	89,83%	2	75,32%	0,83
Daimler Truck	16,69	10,15	39,15%	80,00%	88,33%	2	79,83%	0,77
Deutsche Bank	9,66	6,12	36,64%	84,32%	87,71%	2	75,74%	0,80
Deutsche Börse	55,99	37,12	33,71%	80,08%	92,37%	2	75,32%	0,79
Deutsche Post	25,02	16,61	33,63%	80,93%	88,98%	2	74,89%	0,79
Deutsche Telekom	6,47	4,47	31,00%	82,63%	91,10%	2	75,32%	0,79
E.ON	4,40	2,95	32,80%	80,08%	92,80%	2	74,89%	0,81
Fresenius	19,15	11,28	41,09%	79,24%	94,07%	2	75,74%	0,69
Fresenius Medical Care	25,81	17,44	32,45%	82,20%	91,10%	2	74,89%	0,80
Hannover Rück	65,95	49,66	24,70%	80,51%	90,68%	2	72,34%	0,88
HeidelbergCement	31,61	20,92	33,83%	83,90%	91,95%	2	79,15%	0,77
HelloFresh	64,32	41,13	36,05%	79,24%	90,68%	2	76,17%	0,77
Henkel vz.	31,30	21,77	30,43%	79,66%	87,71%	2	75,74%	0,80
Infineon	21,25	13,82	34,99%	80,93%	90,25%	2	75,74%	0,77
Linde	109,46	74,28	32,14%	81,36%	90,68%	2	72,34%	0,79
Mercedes-Benz	51,03	34,84	31,72%	87,29%	87,71%	2	77,87%	0,79
Merck	102,64	63,70	37,94%	77,97%	90,68%	2	74,04%	0,73
MTU Aero Engines	104,40	76,85	26,38%	84,32%	88,98%	2	76,17%	0,83
Münchener Rück	107,14	74,11	30,83%	80,93%	94,07%	2	73,19%	0,79
Porsche	55,81	42,22	24,36%	87,29%	88,98%	2	75,74%	0,85
PUMA	53,21	34,56	35,04%	80,51%	94,07%	2	77,02%	0,78
QIAGEN	18,29	13,62	25,56%	81,78%	89,41%	2	74,47%	0,88
RWE	15,68	12,48	20,42%	79,66%	91,10%	2	74,47%	0,90
SAP	43,96	29,07	33,87%	81,78%	92,37%	2	74,04%	0,76
Sartorius vz.	477,57	309,75	35,14%	82,63%	92,80%	2	76,17%	0,72
Siemens	72,59	51,51	29,04%	81,78%	87,71%	2	74,47%	0,85
Siemens Healthineers	29,67	21,00	29,21%	82,20%	89,83%	2	76,60%	0,86
Symrise	50,83	33,44	34,20%	80,93%	90,68%	2	75,32%	0,77
Volkswagen	100,70	74,26	26,26%	85,17%	88,14%	2	74,89%	0,89
Vonovia	21,35	14,77	30,81%	86,02%	93,64%	2	77,87%	0,83
Zalando	52,13	32,14	38,35%	80,08%	92,37%	2	74,89%	0,75
Durchschnitt	59,71	40,48	31,97%	81,96%	90,57%	2	75,40%	0,81

Tabelle1: Vergleich von Prognosen und Bändern mit und ohne Trendadaption.

6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde mit Trend-Adaptive Moving Averages (TAMA) ein Verfahren entwickelt, durch das eine der größten Schwächen von Moving Averages (MAs) beseitigt werden kann: ihre systematische Unter- bzw. Überschätzung des Kurses während Aufwärts- bzw. Abwärtstrends. Dadurch ist es zum einen nicht länger notwendig, ihre Interpretation entsprechend anzupassen; zum anderen erhalten nachgelagerte Indikatoren und Handelsmodelle, die auf MAs aufbauen, so verzerrungsfreien Input. Ersteres wurde qualitativ anhand von Kursglättung illustriert, die für alle Periodendauern mit Trendadaption deutlich akkurater ausfiel als ohne, und zudem nahezu verzögerungsfrei.¹³ Zweiteres wurde quantitativ am Beispiel von Bollinger-Bändern demonstriert; dabei erhöhte sich durch TAMA bei gleicher Breite des Kanals der Anteil der Kurse, die tatsächlich in diesen fielen, von durchschnittlich 82% (statt der oft postulierten 95%) auf über 90%. Punktschätzer des Folgetagkurses wurden sogar um fast 1/3 verbessert.

Dieses Verfahren kann für jeden beliebigen (in den Kurswerten linearen) MA angewandt werden; die Vorgehensweise dazu wurde allgemein hergeleitet und am Beispiel der drei bekanntesten MAs (SMA, WMA, EMA) illustriert. Zudem wurde ein weiterer MA abgeleitet, der Harmonic MA (HMA), der einen engen natürlichen Zusammenhang mit dem TAMA-Verfahren aufweist. Dieser zeigte besonders gute Glättungseigenschaften und sollte daher näher betrachtet werden. Grundsätzlich ließen sich zwischen den verschiedenen TAMA-Formen aber keine größeren Unterschiede feststellen als zwischen ihren Basen; eine Ausnahme dazu bildete allerdings der trendangepasste SMA (der TASMA), der aus statistischen Gründen weniger robust als seine Alternativen ausfällt und daher eher nur aus theoretischem Interesse heraus verwendet werden sollte. Außerdem zeigte sich, dass TAMAs i.d.R. mit einer etwas höheren Periodeneinstellung verwendet werden sollten als ihre jeweilige Basis.

Da das TAMA-Verfahren auf mehrfachen linearen Regressionen basiert, eröffnen sich dadurch noch zusätzliche Möglichkeiten für die technische Analyse. Einige davon, u.a. ein neues mögliches Prognoseverfahren und ein neuer Bänderindikator inkl. Handelssignalen, wurden im Rahmen dieser Arbeit skizziert; eine jeweils ausführliche Betrachtung hätte diesen jedoch verlassen. Dies bleibt für zukünftige Forschung, ebenso wie die Evaluation von TAMAs in gängigen Handelssystemen. So wäre es bspw. interessant, zu untersuchen, wie sich der Ersatz der EMAs im MACD durch ihre trendangepassten Pendanten (den TAEMAs) auswirkt, u.v.m.

¹³ Im Rahmen der VTAD sei dazu angemerkt, dass Dr. Manfred Dürschner in seiner ebenfalls Award-prämierten Arbeit (Dürschner 2011) ein Verfahren auf Basis der Empirical Mode Decomposition (EMD) entwickelt hat, mit dem ebenso eine Verbesserung der Zeitverzögerung von MAs erreicht werden kann.

Implementation in MetaTrader

Das TAMA-Verfahren wurde für das gängige Handelsprogramm MetaTrader 5 implementiert. Dazu wurde ein „Indikator“ (im Sinne des Programms) entwickelt, der es derzeit für den HMA, den SMA, den WMA und den EMA sowie die Aggregationsfunktionen arithmetisches Mittel, Minimum, Maximum und Quantile anwenden kann. Der Indikator kann über den MQL5-Marktplatz (<https://www.mql5.com/de/market>) heruntergeladen werden.

Anhang: Herleitung der Regressionskoeffizienten in (5a) und (5b)

Schätzt man allgemein eine einfache lineare Regressionsgleichung der Form $y = \alpha + \beta \cdot x$ anhand von je m Ausprägungen x_j und y_j von x bzw. y , so ist bekannt, dass die Schätzwerte der Regressionskoeffizienten gegeben sind durch $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x}$ und $\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2}$ (vgl. z.B. Mosler und Schmid 2005, S. 295). Dabei sind \bar{x} und \bar{y} die arithmetischen Mittel der x_j bzw. y_j .

Im konkreten Fall beschreibt die abhängige Variable y den Kurs k , und zwar im durch die i -te Regression festgelegten Fenster. Dieses beginnt beim Zeitpunkt $t - i + 1$ und endet beim Zeitpunkt t , sodass $y_j = k_{t-i+j}$ gilt und es gerade $m = i$ Punkte umfasst. Es ist weiter $\bar{y} = \bar{k}_{t,i}$.

Die einzige unabhängige Variable x entspricht dem Trend. Dieser ist, aufgrund seiner Linearität, durch schlichtes aufsteigendes Durchnummerieren der Punkte des Fensters abzubilden; d.h. es gilt $x_j = j$. Damit ist $\bar{x} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m j$, was sich nach Anwendung der Gaußschen Summenformel zu $\bar{x} = \frac{i+1}{2}$ vereinfacht und nicht überrascht – natürlich ist $\frac{i+1}{2}$ die Mitte der Zahlen von 1 bis i .

Zur Auflösung des Nenners bei der Berechnung von $\hat{\beta}$ kann man sich zunutze machen, dass $\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^m (j - \bar{j})^2 = m \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m (j - \bar{j})^2 = m \cdot \sigma^2$ gilt, wobei σ^2 die unkorrigierte Strichprobenvarianz der ersten m natürlichen Zahlen darstellt. Diese zu ermitteln, ist eine bekannte Statistikübung; es ergibt sich $\sigma^2 = \frac{m^2-1}{12}$ (vgl. z.B. Tulsian und Jhunjhunwala 2008, S. 5.53). Wird σ^2 dann wie gezeigt mit m multipliziert, $\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2$ aus dem Nenner durch Kehrwertbildung herausgezogen und $m = i$ eingesetzt, ergibt sich der Vorfaktor aus (5b).

Die Darstellung insb. von (5b) ließe sich noch etwas vereinfachen; darauf wurde jedoch aus Gründen einer besseren Plausibilitätsprüfbarkeit z.B. bei der Implementation verzichtet.

Referenzen

- Admirals (2022): So setzen Sie den Moving Average im Trading richtig ein, <https://admiralmarkets.com/de/wissen/articles/forex-indicators/die-vorteile-des-moving-average-beim-trading>.
- Bollinger (2001): Bollinger on Bollinger Bands. McGraw-Hill Education Verlag.
- Chande, T.S. und Kroll, S. (1994): The New Technical Trader. John Wiley & Sons Verlag.
- Dürschner, M. (2011): Gleitende Durchschnitte 3.0 (Moving Averages 3.0). Beitrag zum VTAD-Award 2011, <https://www.vtad.de/fa/gleitende-durchschnitte-3-0-moving-averages-3-0/>.
- gorx1 (2020): Harmonic Moving Average, <https://www.tradingview.com/script/mpWRYb8F-Harmonic-Moving-Average>.
- Kaufman, P. (1995): Smarter Trading – Improving Performance in Changing Markets. McGraw-Hill Verlag.
- Mosler, K. und Schmid, F. (2005): Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik. 2. Auflage. Springer Verlag.
- Pfeifer, D. (2018): Best Estimate, <https://solvency-kompakt.de/content/best-estimate>.
- Raudys, A. und Pabarskaite, Z. (2016): Optimising The Smoothness And Accuracy Of Moving Average For Stock Price Data. Technological and Economic Development of Economy, 24. Jg., Nr. 3, S. 984–1003.
- Tulsian, P.C. und Jhunjhunwala, B. (2008): Business Statistics. S. Chand Limited Verlag.
- Zinovik, A. (2017): Comparing Different Types Of Moving Averages In Trading, <https://www.mql5.com/en/articles/3791>.